EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

48e jaargang
1972/1973
no 1
augustus/september

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12. Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-130785.
Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 200,—, $^1/_2$ pag. *f* 110,- en $^1/_4$ pag. *f* 60,—.

Meetkunde met vectoren I

(het uitgangspunt)

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

De laatste vier jaar heb ik in de bovenbouw van het gymnasium geëxperimenteerd met het vak meetkunde met vectoren, zonder daarbij een bepaald boek te gebruiken. De voorzitter van de redactie vroeg mij, of ik iets van mijn bevindingen in Euclides wilde schrijven. Gaarne voldoe ik aan zijn verzoek. Het lijkt mij het beste, dat ik in een serie artikeltjes weergeef, wat voor mij het belangrijkste is geweest. Daartoe moet ik eerst uiteenzetten, wat volgens mij de plaats van het vak meetkunde met vectoren in het wiskundeonderwijs op het vwo is.

In de voorbeeldtabellen van jaren her, uit het 'witte boekje', vindt men in klasse 4:

voor alle leerlingen 2 uur wiskunde, en wel wiskunde I;

voor de B-leerlingen bovendien 3 uur wiskunde, en wel wiskunde II.

Bij de eerstvolgende herziening zijn deze 3 uur wiskunde II teruggebracht tot 2 uur.

De voorbeeldtabellen waren reeds gepubliceerd, toen de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde begon met het opstellen van een leerplan. Bij het samenstellen van dit leerplan is de CMLW dan ook uitgegaan van de mogelijkheden, die door de voorgestelde urenverdeling gegeven waren.

Zowel de A- als de B-leerlingen kunnen wiskunde I in hun keuzepakket opnemen. De A-leerlingen volgen echter niet de 3 (later 2) uren in klasse 4 gereserveerd voor de B's. De inhoud van deze uren mag dus niet van zodanige aard zijn, dat een met vrucht volgen van het onderwijs in wiskunde I in de bovenbouw belemmerd zou worden door het niet volgen van deze lessen. De inhoud van de 4B-uren mag dus alleen preluderen op de wiskunde II uit de bovenbouw. Hij moet bovendien van dien aard zijn, dat het nuttige leerstof is voor elke B-leerling. Vandaar dat gedacht is aan een inleiding in de vectormeetkunde, waarbij men ook kennis zou maken met het inwendig produkt, en waarbij men verder in contact zou komen met zaken van algemeen nut, zoals eenvoudige stereometrische begrippen en kennismaking met de kegelsneden.

Hoe vanzelfsprekend het voorgaande ook mag klinken, toch geloof ik dat deze opvatting door de feitelijke ontwikkeling al weer achterhaald is of althans spoedig achterhaald zal worden. Ik zal wel niet het complex van oorzaken hoeven te noemen, dat ons noodzaakt zo efficiënt mogelijk te werk te gaan. Volgens mij brengt dit met zich mee, dat we ervan af moeten zien de uren in 4B te

beschouwen als uren in algemene mathematische ontwikkeling tevens geschikt als prelude voor de wiskunde II in de bovenbouw. We zullen deze uren hard nodig hebben voor wiskunde I. Het zal noodzakelijk zijn, dat ieder die in de bovenbouw wiskunde I in zijn pakket opneemt, de uren wiskunde-B in klasse 4 volgt. (Aan mijn eigen school is dit doorgevoerd.) Men kan dan een uur ervan besteden aan verdieping van het functiebegrip en het andere aan een inleiding in de differentiaalrekening.

Dit laatste heeft het grote voordeel, dat ieder die in klasse 5 natuurkunde of scheikunde wenst te volgen, reeds kennis heeft van de beginselen van de differentiaalrekening. Verder is het zeer gewenst, dat ook zij die economie I in hun pakket opnemen, deze inleiding volgen. Naar mij meegedeeld is, is het dan mogelijk voor economie I in de bovenbouw 2 x 3 uur uit te trekken, terwijl dit aantal onvoldoende is, als ook nog de nodige wiskundekennis door de leraar economie de leerlingen bijgebracht moet worden. Misschien is het gewenst in deze inleidende cursus ook iets over integraalrekening te vertellen. Een ander voordeel van het terugschuiven van een uur analyse naar klasse 4B is, dat men in de bovenbouw iets meer tijd krijgt voor een verantwoorde behandeling van de twee zo uitermate belangrijke onderwerpen: analyse en statistiek.

Kennelijk wordt door het verdwijnen van de wiskunde II uit klasse 4B iets over boord gezet. We moeten eerst nagaan in hoeverre dit catastrofaal is. Het gaat in essentie om twee dingen: de kegelsneden en de ruimtemeetkunde.

Ellips en hyperbool kunnen we op twee manieren doen ontstaan. De ene manier is, dat we uitgaan van de brandpuntseigenschappen en ellips en hyperbool als puntverzamelingen definiëren. De bijbehorende vergelijkingen worden dan afgeleid op precies dezelfde manier als vroeger in de analytische meetkunde. De andere manier is de volgende functies te beschouwen:

$$(x, y) \to x^2 + y^2$$
$$(x, y) \to x^2 + ay^2 \qquad (a > 0)$$
$$(x, y) \to x^2 - y^2$$
$$(x, y) \to x^2 - ay^2 \qquad (a > 0)$$

De niveaulijnen van de eerste functie zijn cirkels. De niveaulijnen van de tweede functie ontstaan uit die van de eerst door een 'strekking' met als richting de y-as. Deze niveaulijnen heten ellipsen. De niveaulijnen van de derde functie eisen iets meer geduld. Men vindt twee symmetrieassen, twee toppen (de snijpunten met de x-as) en ten slotte met wat rekenwerk twee asymptoten. We noemen deze niveaulijnen orthogonale hyperbolen. En ten slotte vinden we uit de vierde functie de hyperbool als beeld van een orthogonale hyperbool bij een strekking met als richting de y-as. Volgens mij raakt deze behandelingswijze meer het essentiële van ellips en hyperbool dan de meetkundige behandelingswijze. Weglating van de wiskunde II uit klasse 4 behoort dus gepaard te gaan met het introduceren van de ellips en de hyperbool in het programma voor de analyse.

Onaangenamer is het tweede punt: de ruimtemeetkunde. Ik zie geen manier om het stereometrisch inzicht te ontwikkelen binnen het kader van het onderwijs in wiskunde I. In de onderbouw wordt wel eens de ruimte mee in de besprekingen betrokken, maar dat blijft meestal beperkt tot een min of meer kunstmatig met de haren erbij slepen van de kubus. In de analyse wordt de inhoud van enkele lichamen afgeleid, maar ook dat is slechts een schrale troost.
Inzicht in de ruimte verkrijgen we nu eenmaal hetzij door mathematisch fröbelonderwijs in de onderbouw, hetzij door een verantwoorde afleiding van stereometrische eigenschappen in de bovenbouw. In de onderbouw ontbreekt ons de tijd om nog extra te gaan fröbelen. En in de bovenbouw zou dit betekenen: axiomatisch-deductieve behandeling van een stuk stereometrie of vectoriële behandeling ervan. Zowel het ene als het andere kost ons minstens een jaaruur en we zijn nu juist tot de conclusie gekomen, dat we deze tijd niet hebben. Willen we onze energie dus niet versnipperen, dan zullen we het offer moeten brengen een stuk mathematische algemene ontwikkeling braak te laten liggen.

Na deze beginselverklaring kunnen we met ons eigenlijke onderwerp beginnen. De leerling heeft in vorige jaren reeds met vectoren kennis gemaakt en er enigszins mee leren rekenen. Hoe deze vectoren gedefinieerd waren, weet ik niet. Misschien waren het geordende puntenparen, misschien gerichte lijnstukken; misschien waren ze vrij, misschien hadden ze een vast beginpunt. Hoe het ook zij, in elk geval is er een optelling van vectoren gedefinieerd en is er bewezen, dat voor deze optelling de volgende eigenschappen gelden:

A1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
A2. $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$
A3. de optelling heeft een neutraal element ($\mathbf{0}$):
$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
A4. elk element heeft een tegengestelde ($-\mathbf{v}$):
$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

Verder is een vermenigvuldiging gedefinieerd van een reëel getal en een vector en bleek (of blijkt) deze de volgende eigenschappen te hebben:

A5. $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$
A6. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
A7. $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
A8. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Voorzover de juistheid hiervan vroeger niet aangetoond is, zal het nu weinig moeite kosten deze aan het licht te brengen.
Nu wordt het tijd wat te gaan rekenen met vectoren, d.w.z. uit de eigenschappen A1-8 enkele andere af te leiden. Vooral niet veel. Ik denk b.v. aan:

$\mathbf{v} + \mathbf{x} = \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$
definitie: $\mathbf{w} - \mathbf{v} \overset{\text{df}}{=} \mathbf{w} + (-\mathbf{v})$
$\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$
$(\mathbf{w} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{w}$
$0\mathbf{v} = \mathbf{0}$
$(a - b)\,\mathbf{v} = a\mathbf{v} - b\mathbf{v}$
$a\mathbf{v} + (-a)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$
$(-2)\mathbf{v} = -(2\mathbf{v})$
$(-1)\,\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

Het doel hiervan is de leerling aan de hand van deze voorbeelden duidelijk te maken, dat het mogelijk is uit de eigenschappen A1-8 andere af te leiden zonder er daarbij aan te denken, wat vectoren eigenlijk zijn. (D.w.z. wij weten, dat dit ons doel is, maar we zeggen het niet, omdat het belang ervan in dit stadium nog niet te begrijpen is.)
We gaan nu naar de 'werkelijkheid' terug. Wat zijn vectoren? Laten we aannemen, dat de leerling in de onderbouw geleerd heeft, dat vectoren gerichte lijnstukken zijn en dat twee vectoren gelijk zijn als ze even lang en gelijkgericht zijn. Zijn vectoren waren dus vrije vectoren. Waarschijnlijk waren deze vrije vectoren te voorschijn gekomen door op te merken, dat er een bijectie bestaat tussen deze vrije vectoren en de translaties, welke bijectie de som van twee vectoren doet corresponderen met de samengestelde van de bijbehorende translaties. Welnu een dergelijke bijectie bestaat ook tussen translaties en gerichte lijnstukken met vast beginpunt. Zouden we een gericht lijnstuk met vast beginpunt O ook een vector kunnen noemen? Ook voor deze 'vectoren' blijven de eigenschappen A1-8 van kracht. Met deze vectoren kunnen we dus net zo rekenen als met de vroegere. Ook voor deze vectoren gelden dus de boven genoemde afgeleide eigenschappen.
We kunnen ook zeggen, dat een translatie bepaald is door te geven welk punt het beeldpunt van een vast punt O is. Zo kunnen we een bijectie tot stand brengen tussen de translaties en de geordende puntenparen met vast beginpunt O. Ook nu zijn A1-8 en daarmee de eruit afgeleide eigenschappen van kracht.
Tenslotte is er een vierde manier om vectoren te definiëren. We hebben zo juist gezegd: een vector is een geordend puntenpaar met vast beginpunt O, dus een geordend paar (O, A). Waarom zouden we dat vaste punt O in al onze beschouwingen meeslepen? Eenvoudiger is in het platte vlak een vast punt O te kiezen en nu te zeggen: een vector is een punt in het vlak. Dat lijkt gek; waarvoor dient dat punt O nu nog? De rol daarvan komt te voorschijn, zodra we de optelling van vectoren gaan definiëren. De vectoren 'punt A' en 'punt B' tellen we op door op OA en OB een parallellogram te construeren. Het vierde hoekpunt C van dit parallellogram is nu de som van de vectoren 'punt A' en 'punt B'. En natuurlijk speelt O ook een rol bij de definitie van het produkt van een reëel getal en een vector.
Nu begint duidelijk te worden, dat het er eigenlijk weinig toe doet, wat we nu eigenlijk een vector noemen. Het enige, dat van belang is, is dat hetgeen we vector noemen de eigenschappen A1-8 heeft. Als dat het geval is, dan kunnen we met

onze vectoren gewoon rekenen, d.w.z. zijn al die eigenschappen juist, die we hierboven uit A1-8 afgeleid hebben.
We zouden zelfs heel gekke dingen vectoren kunnen noemen. Onderstel, dat een huisvrouw inkopen doet in een warenhuis. Ze koopt vijf artikelen, t.w. suiker, thee, koffie, rijst en cacao. Koopt ze s gram suiker, t gram thee, k gram koffie, r gram rijst en c gram cacao, dan noteren we haar inkoop (s, t, k, r, c). Soms heeft ze te veel van een bepaald artikel, b.v. te veel koffie. Ze brengt dan wat koffie terug. Het warenhuis is gewillig en neemt dat. We definiëren nu:

$$(s_1, t_1, k_1, r_1, c_1) + (s_2, t_2, k_2, r_2, c_2) = (s_1 + s_2, t_1 + t_2, k_1 + k_2, r_1 + r_2, c_1 + c_2)$$

$$a(s, t, k, r, c) = (as, at, ak, ar, ac)$$

En gezien het feit, dat weer aan A1-8 voldaan is, blijkt de huisvrouw telkenmale met een vector thuisgekomen te zijn.
Maar ons onderwerp is meetkunde met vectoren en niet huisvrouw met vectoren. Wij zullen dus meetkundige dingen vectoren noemen. Maar welke? We hebben gezien, dat we een ruime keus hebben. Ik zou de volgende keus willen doen: een vector is een punt in een vlak, waarin een vast punt O gekozen is.
Misschien is de volgende formulering didactisch wat duidelijker. De punten van een vlak noemen we vectoren. Een van de punten noemen we de nulvector. Daarna definiëren we de optelling van vectoren met behulp van de parallellogram-constructie en de vermenigvuldiging van reëel getal en vector op de gebruikelijke manier.
Bovenstaande formulering gaat ervan uit, dat we reeds een vlak hebben en dat we in dit vlak vectormeetkunde willen bedrijven. Ik geloof niet, dat het enige zin heeft bij het vwo verder te willen gaan met de abstractie. Dit is dus ons uitgangspunt. En nu willen we dit uitgangspunt gebruiken om meetkundige eigenschappen te gaan afleiden. Maar daarover volgende keer.

Aantekeningen over Vektormeetkunde op het MAVO

P.I.A. KNOPS

Heerlen

I In de bovenbouw van het vwo en havo is de analytische meetkunde en de stereometrie vervangen door de vektormeetkunde. Het aantal leerlingen dat dit jaar een mavo-diploma zal behalen en dat naar het havo zal gaan is waarschijnlijk groter dan men heeft vermoed in het aanvankelijk stadium van de mammoetwet. In de bovenbouw zullen deze leerlingen geconfronteerd worden met meetkunde met vektoren. Vraag: hoe zijn deze leerlingen voorbereid op dit onderwerp? We zullen dit voor een tweetal leerboeken proberen aan te geven.
A. Krooshof e.a.: *Moderne wiskunde* geeft in deel 6HM een veertigtal pagina's over vektoren. Intuïtief hebben de leerlingen er al kennis meegemaakt bij het optellen en aftrekken in deel 1 en 2 nl. door gebruik te maken van de getallenrechte. In deel 3HM kwamen de translaties ter sprake. Tot nu toe kent de leerling een vektor als een pijl bepaald door een richting en lengte.
In deel 6HM bouwt men voort op de translatie en komt men tot een *mathematisch model.* Een vektor wordt nu een verzameling van alle gelijke en gelijkgerichte lijnstukken. Men bouwt dit mathematisch model verder uit.
Vraag: is dit alles voor deze leerlingen haalbaar? Indien dit inderdaad zo is, dan is de bovenbouw er zeer bij gebaat.
B. Van Hiele e.a.: *Van A tot Z* maakt ook gebruik van de translatie.
In deel 2b les 21 volgt een intuitieve inleiding. Een vektor heeft een grootte, een richting, een beginpunt en een eindpunt. Verder voert men als nieuwe begrippen in richtingsvektor, nulvektor, tegengestelde van een vektor, nevenvektor. Verspreid over de verschillende volgende delen wordt een en ander herhaald en uitgebreid. Het geheel blijft een *intuïtief model.*

II De overgang van transformatiemeetkunde naar vektormeetkunde!
In beide genoemde methodes komt men via de translatie tot de vektoren. Dit verband is belangrijk voor de leerlingen, zodat ze zo de meetkunde als een geheel kunnen blijven zien. Men voorkomt zodoende, dat de leerling de vektormeetkunde als een apart onderdeel gaat beschouwen. Het volgende schema geeft enigszins samengevat het verband aan tussen translaties en vektoren.

Translaties	**Vektoren**
translatie v	vektor $\vec{v}$
translatie $[a;b]$	vektor $\vec{ab}$
samengestelde translatie $w \circ v$	som $\vec{w} + \vec{v}$
tegengestelde translatie v^{inv}	tegengestelde vektor $-\vec{v}$
identiteit i	nulvektor $\vec{o}$
verzameling translaties	verzameling vektoren
commutativiteit	
$w \circ v = v \circ w$	$\vec{w} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w}$
associativiteit	
$(w \circ v) \circ u = w \circ (v \circ u)$ $= w \circ v \circ u$	$(\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u} = \vec{w} + (\vec{v} + \vec{u})$ $= \vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$
neutraal element	
i	$\vec{o}$
$v \circ i = v = i \circ v$	$\vec{v} + \vec{o} = \vec{v} = \vec{o} + \vec{v}$

Een andere manier om van transformatiemeetkunde te komen tot vektormeetkunde is gebruik maken van matrices. In de methode Van A tot Z wordt de evenredigheidsmatrix gebruikt. Zou dit geen begin kunnen zijn om te onderzoeken in hoeverre een overgang m.b.v. matrices een haalbare zaak zou zijn voor de mavo-leerling?

III Het introduceren van het inprodukt.
In de mavo-editie van Moderne Wiskunde komt het inprodukt niet voor.
In de vwo-delen voor de bovenbouw gaat men uit van de natuurkunde.
Eerst gaat men uit van de cosinus met behulp van de eenheidscirkel, hierna geeft men de cosinusregel en daarna het inprodukt.
In de delen 3a en 3b van Van A tot Z wordt het inprodukt reeds ingevoerd. Met behulp daarvan wordt de cosinus gedefinieerd, waarna de cosinusregel kan worden afgeleid.
Het is gebleken dat dit onderwerp voor mavo-leraren moeilijkheden oplevert. De schrijvers hebben een afwijkende behandelingsmethode in portefeuille, maar zij willen nog niet tot wijziging in het boek overgaan zo lang ze niet zeker weten dat de mavo-leerling de nu gevolgde methode werkelijk niet aankan.

Opvallend is toch wel dat Moderne Wiskunde en Van A tot Z de begrippen inprodukt en cosinus in verschillende volgorde introduceren. Welke behandeling zou de beste zijn?

IV Ter overdenking

1 Wat is uw mening over een mathematisch model van de vektormeetkunde in mavo-4? (Zie Niko, 10, pag. 117-120.)

2 Is het werken met matrices een haalbare zaak?

3 Wat is uw ervaring met het werken met het inprodukt?

4 Wat mag men wel en wat niet gebruiken uit de meetkunde bij optellen en aftrekken van vektoren?

5 Levert de vektor-optelling moeilijkheden op?

6 Verdient het aanbeveling woorden als: parameter, scalar, kentallen, coör-

MAVO	JAAR	Wiskunde 1	Wiskunde 2
4	1972	9	
		18	
		26	
		29	
4	1972		4
3	1971		1
			12
4	1971	5	
4	1971		15
			22
			24
			25
3	1971-herex		20
			25
4	1971-herex	5	
4	1971-herex		13
			20
			27
3	1970	1	
		2	
		14	
4	1970	18	
		28	
4	1970		1
3	1970-herex	1	
		2	
		10	
		23	
4	1970-herex	12	
		18	
		19	
		21	
		24	
		26	
		30	

dinaten, componenten e.d. te onderscheiden?
7 Is u van mening, dat de moeilijkheden vaak liggen in het gebruik van de wiskundige taal?
8 Hebt u wel eens geprobeerd geheel algebraïsch te werken zonder meetkundige interpretatie? Wat zijn uw ervaringen?
9 Het introduceren van het begrip inprodukt blijkt veel moeilijker dan het invoeren van het begrip vektor. Wat zijn de oorzaken?
10 Overzicht uit de eindexamens mavo-3 en mavo-4 (p 8).

V Literatuur:

1 C.M.L.W.: Toelichting op het leerplan, mei 1969, pag. 12.

2 Drs. W.J. Brandenburg: Verslag van de cursus Meetkunde met vectoren voor ULO-leraren te Groningen en Leeuwarden, 1966-1967.

3 J.H. Wansink: Didaktische oriëntatie voor wiskunde leraren, Deel III, pag. 130-169.

4 Niko 10, pag. 117-120, Verslag van de 2e lezing van Frederique op het internationale congres te Knokke 1971.

5 Frederique: Inleiding tot de vlakke vectormeetkunde Niko 11 pag 3-12.

6 W.J. Kniep: Vectormeetkunde
Experiment moderne wiskunde van de Drie Pedagogische Centra Ref. nr. II/11.08/71/E.M.W./53 pag. 31-39.

Knokke 1972

Telkenjare organiseert het Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde een internationaal congres te Knokke. Het elfde congres heeft, als eerste van de tweede serie van tien, een nieuwe titel gekregen: Eerste Internationaal Congres van het Zwin. Het thema luidde: Van kleuterschool tot hogeschool. De officiële talen van het congres zijn niet alleen het Frans en het Engels, maar ook het Nederlands. Mogelijk is dit een extra aanmoediging voor landgenoten in de toekomst op dit congres eens aanwezig te zijn. Het loont stellig de moeite.
Het is niet mijn bedoeling van dit congres een uitvoerig verslag te geven. Ik wil slechts op één detail ingaan. Het werk van het B.C.M.W. concentreert zich tegenwoordig, nu de hervorming van het secundair onderwijs zijn beslag gekregen heeft, op de hervorming van het wiskundeonderwijs op de basisschool en zelfs gaat men al na, welke begrippen op de kleuterschool voorbereid kunnen worden. Onderzoekingen met vierjarige kinderen zijn daartoe verricht. Maar daarover wil ik het niet hebben. Ik wil iets weergeven uit een voordracht van *Frédérique* over onderwijs aan leerlingen van tien jaar. Het ging erom begrippen aan de leerlingen bij te brengen, die vanuit hoger gezichtspunt een inleiding in de lineaire algebra genoemd kunnen worden. Natuurlijk begeven we ons niet in een abstracte lineaire ruimte, maar beschouwen we de concrete 'vectoriel des achats', dus de vectorruimte van de inkopen.
Sylvia wordt door haar moeder naar een levensmiddelenzaak gestuurd. Het is een tamelijk primitieve zaak, waar men slechts twee artikelen kan kopen: tomaten en citroenen. Moeder geeft Sylvia de opdracht 3 kg tomaten en 1 kg citroenen te kopen. Helaas is Sylvia ietwat verstrooid en koopt ze bij vergissing 1 kg tomaten en 3 kg citroenen. Moeder is uiteraard niet zo erg tevreden en stuurt Sylvia naar de winkel terug. Daar is men bereid de zaak voor haar in het reine te brengen. Sylvia mag 2 kg citroenen teruggeven en krijgt 2 kg tomaten erbij. In totaal heeft ze nu dus inderdaad de verlangde 3 kg tomaten en 1 kg citroenen ontvangen.

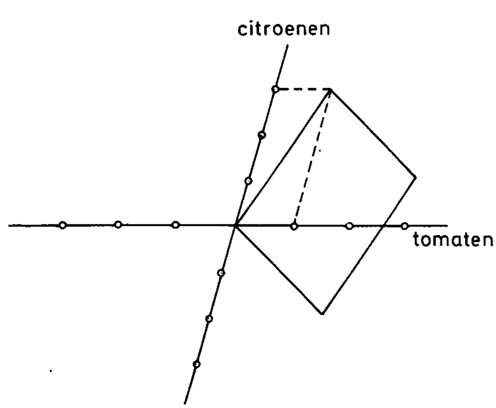


Fig. 1

In fig. 1 zijn de inkopen voorgesteld door punten in het platte vlak. Men ziet het 'parallellogram van inkopen' tevoorschijn komen. De som van de beide inkopen 1 kg tomaten en 3 kg citroenen, en 2 kg tomaten en --2 kg citroenen is gelijk aan de verlangde 3 kg tomaten en 1 kg citroenen.
Nu gaan we een stap verder. De prijs van 1 kg tomaten is 2 gulden en die van 1 kg citroenen 3 gulden. Sylvia krijgt 11 gulden mee. Wat zou ze hiervoor kunnen kopen? Ze kan b.v. kopen 1 kg tomaten en 3 kg citroenen. Of 2½ kg tomaten en 2 kg citroenen. Of 5½ kg tomaten en helemaal geen citroenen. Enz. Al deze mogelijkheden geven we door middel van stippen in de figuur weer (fig. 2).
Om verder te komen vragen we naar de 'achats gratuits'. Wat kan Sylvia voor niets krijgen? B.v. 3 kg tomaten en – 2 kg citroenen, 6 kg tomaten en – 4 kg citroenen, – 3 kg tomaten en 2 kg citroenen, – 6 kg tomaten en 4 kg citroenen. Ook deze inkopen stellen we door stippen in de figuur voor. En nu zien we duidelijk, dat de stippen, die de achats gratuits voorstellen, een rechte lijn vormen.

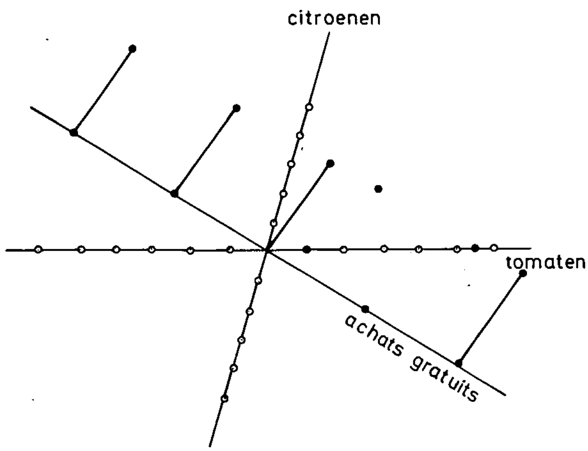


Fig. 2

We keren terug naar onze inkopen, die we kunnen doen voor 11 gulden. Een van deze inkopen was: 1 kg tomaten en 3 kg citroenen. Hoe krijgen we nu andere inkopen van 11 gulden? Neem een achat gratuit en tel daarbij op een inkoop van 11 gulden, dus b.v. 1 kg tomaten en 3 kg citroenen. Je krijgt dan steeds een inkoop van 11 gulden. Zo zien we, dat ook alle inkopen van 11 gulden op een rechte lijn liggen. We hebben zo de lijn $2x + 3y = 11$ getekend.
Hoe tekenen we nu andere lijnen, b.v. de lijn $4x + 2y = 7$? We behoeven niets anders te doen dan de prijs van 1 kg tomaten en die van 1 kg citroenen te wijzigen. Neem aan dat 1 kg tomaten 4 gulden kost en 1 kg citroenen 2 gulden. Wat kunnen we dan voor 7 gulden kopen? Op precies dezelfde manier vinden we zo in de tekening de lijn $4x + 2y = 7$.
Natuurlijk kunnen we nu nog wat met de gevonden resultaten gaan jongleren. We kunnen vragen naar de snijpunten van de verkregen lijnen met de assen. We

kunnen ten slotte zelfs langs grafische weg twee vergelijkingen met twee veranderlijken oplossen.
Het spreekt vanzelf, dat er in de vier dagen congres heel wat meer te genieten was. Ik heb alleen één detail, dat me bijzonder gefrappeerd heeft, naar voren willen brengen.
Wie meer over het congres wil weten, kan de verslagen van de voordrachten vinden in het Belgische tijdschrift Niko (Nederlandstalig).

P.G.J. Vredenduin

Tentamens statistiek

Onder toezicht van het ministerie van Economische Zaken neemt de examencommissie Statisticus van de Vereniging voor Statistiek najaar 1972 tentamens af.

Tentamen Wiskunde-VVS

2 oktober 1972 van 14.00 tot 17.00 uur in de Calandzaal van het Groothandelsgebouw te Rotterdam.

Tentamen Verplichte Capita-VVS

schriftelijk gedeelte;
2 oktober 1972 van 9.30 tot 12.30 uur in de Calandzaal van het Groothandelsgebouw te Rotterdam.

mondeling gedeelte;
ca. 4 weken na datum schriftelijk examen op een nader te bepalen plaats.

Degenen die aan de tentamens wensen deel te nemen dienen zich vóór 10 september 1972 aan te melden bij de secretaris van de examencommissie Statisticus-VVS, de heer R. Tillemans, Bachstraat 67 te Zevenaar.
Aanmeldingsformulieren zijn verkrijgbaar bij de secretaris.

Nieuwe niet- euclidische meetkunde

HANS FREUDENTHAL

Utrecht

1 In dit tijdschrift* schreef E.M. Bruins een stuk over 'Niet-euclidische Euclidische Meetkunde', d.w.z. over tot nu toe door iedereen over het hoofd geziene en door hem ontdekte meetkunden. In een ander geschrift** heeft hij ze 'géométries zénoniennes en honneur du grand géomètre Zénon de Sidon, l'Epicurien' genoemd.***
De twee nieuwe meetkunden echter, zoals Bruins ze bedoelt, zijn hersenschimmen. Ik ga in 't volgende alleen op de meest saillante fouten in zijn artikel in, hetgeen niet betekent dat ik de overige accepteer. Ik begin echter met bekende feiten omtrent niet-euclidische meetkunden te memoreren.

2 Zij V het (reële) projectieve vlak en in V een 'absolute' kegelsnede Q, die reëel (hyperbolische meetkunde) of zonder reële punten (elliptische meetkunde) kan zijn, maar in elk geval niet-ontaard moet zijn. De projektieve zelfafbeeldingen van V, die Q invariant laten, vormen de hyperbolische resp. elliptische groep, G_h resp. G_e. Men definieert een onder deze groep invariante afstand en hoekenmaat door middel van dubbelverhoudingen (DV), die immers onder alle projectieve afbeeldingen invariant zijn.
Laten we onze gedachten tot het hyperbolische geval bepalen. Bij twee gegeven punten x, y construeert men de snijpunten van de rechte xy met Q, genaamd p_{xy} en p'_{xy} en berekent hiermee de afstand

$$\rho(x,y) = \kappa \mid \log \mathrm{DV}(x,y;p_{xy}\ p'_{xy}) \mid ,$$

waarbij κ zekere constante is. Hierbij is op te merken:
Bij een $f \in G_h$ gaat de doorsnede van xy met Q in die van $fx\,fy$ met Q over zonder dat vastgelegd is, welk van de twee snijpunten van xy met Q in welk van $fx\,fy$ met Q overgaat. Het is dan ook onbepaald welk van de snijpunten van xy met Q in DV op de derde en welk op de vierde plaats staat. Verwisseling van p_{xy}

*) Euclides 39 (1963-4), 1-15.

**) La géométrie non-euclidienne dans l'antique. Paleis de la Découverte 1968.

***) Dat deze Zenoon – niet te verwarren met die van Elea – iets met meetkunde uitstaande zou hebben, is een origineel idee van Bruins.

en p'_{xy} heeft echter ten gevolge dat de DV in zijn reciproke overgaat en de log DV in zijn tegengestelde. Om deze tweewaardigheid te voorkomen zijn de absoluutstrepen onmisbaar*. Nu wordt ρ vanzelf symmetrisch in x en y.
Beperken we ons tot punten van een enkele rechte, of beschouwen we een georiënteerde rechte, dan kunnen we p_{xy} en p'_{xy} wel onderscheiden, de DV dus ondubbelzinnig bepalen en tenslotte een georiënteerde afstand definiëren, die antisymmetrisch is.
Om de log ondubbelzinnig te kunnen vastleggen, moeten we eisen dat de DV positief is, dus dat p_{xy} en p'_{xy} reëel zijn en x en y *niet* scheiden. Dit is een van de redenen waarom men het hyperbolische puntenvlak tot het inwendige van Q beperkt. De punten van het inwendige van Q zouden, als men bovenstaande definitie *algemeen* volhield, van de punten van Q zelf de (georiënteerde) afstand $\pm\infty$ hebben, en van de punten buiten Q complexe (en niet ondubbelzinnig bepaalde) afstanden. Een andere reden is dat de groep G_h alleen in 't inwendige transitief over de lijnelementen is.
Nu de hoekenmaat. Gegeven twee rechten, X, Y door een inwendig punt van Q. De (complexe) raaklijnen uit het snijpunt van X, Y noemen we P_{XY} en P'_{XY} en definiëren

$$\measuredangle\ (X, Y) = \frac{1}{2i} \log \mathrm{DV}\ (X, Y; P_{XY}, P'_{XY}) .$$

Waarom de factor 1/2i? De DV is absoluut 1, dus log DV is zuiver imaginair en op $2\pi i$ na bepaald. De verkregen hoek is dus mod π bepaald en dat hoort ook zo, want zo is het nu eenmaal gesteld met de hoek van twee rechten. (Bovendien is het 'teken' van de hoek nog onbepaald, maar dit kan men desgewenst in elke vaste waaier vastleggen, zoals daarstraks het teken van de afstand op elke vaste rechte.)
Let wel, deze hoek is niet de hoek uit de meetkundeles en uit Euclides' Elementen. Daar bedoelen we immers een een hoek van *halve* rechten (of georiënteerde rechten), dus een hoek mod 2π. Hoe kunnen we die in de hyperbolische meetkunde definiëren?
Men trekt uit een inwendig punt a van Q twee halve rechten X, Y, bepaalt hun snijpunten x, y met Q en bovendien de raakpunten P_{XY}, P'_{XY} van de (complexe) raaklijnen uit a aan Q, en dan

$$\measuredangle\ (X, Y) = \frac{1}{i} \log \mathrm{DV}\,(x, y; p_{xy}, p'_{xy}) ,$$

waarbij de DV *op* de kegelsnede moet worden genomen (de DV van vier punten op de kegelsnede wordt verkregen door uit een vijfde punt de waaier te vormen, en in de waaier de DV te nemen). Aangezien de DV weer absoluut één is, dus de log op $2\pi i$ na bepaald is, verantwoordt de factor 1/i de gebruikelijke bepaling van de hoek mod 2π.
Men kan de hoek mod 2π uit die mod π nog op een andere wijze verkrijgen, nl. door een 'tweebladige ontrolling'. Men beschouwt in a een hoek met een vast been X_0 en een variabel been X, laat X vanuit X_0 ronddraaien en rekent er, zodra X de

*) Bruins laat ze zonder verklaring weg.

aan X_0 tegengestelde halve rechte passeert, bij de (tussen 0 en π gerekende oorspronkelijke) hoekenmaat $\measuredangle\ (X_0, X)$ het bedrag π bij tot X op de halve rechte X_0 teruggevallen is. De exacte formulering hiervan kan achterwege blijven.
Ik ga ook niet nader op het elliptische geval in, dat analoog aan het hyperbolische is te behandelen.
Wel nog een woord over de euclidische meetkunde. Die laat zich, wat de hoeken aangaat, ook projektief benaderen, met als absolute een ontaarde (lijn)kegelsnede Q, te weten een paar geconjugeerd complexe (isotrope) punten i_1, i_2. De hoek van twee rechten X, Y door a wordt bepaald door

$$\measuredangle\ (X, Y) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \log \mathrm{DV}(X, Y; a\mathrm{i}_1, a\mathrm{i}_2),$$

uiteraard ook weer een hoek mod π. Om aan een hoek van halve rechten (dus mod 2π) te komen, moet men weer een operatie als daarstraks uitvoeren, die ik echter niet herhaal.
Neemt men de ontaarde (lijn)kegelsnede Q reëel, dus bestaande uit twee reële punten i_1, i_2, dan is de DV van daarstraks positief zolang X, Y door i_1, i_2 niet gescheiden zijn en negatief als ze wel gescheiden zijn. Het rechtenvlak wordt door i_1, i_2 als het ware in twee 'stukken' verdeeld; rechten uit hetzelfde stuk hebben met i_1, i_2 een positieve DV; bij rechten uit verschillende stukken van 't rechtervlak wordt de DV negatief. Wenst men in deze meetkunde ook een hoek te definiëren, dan zou dit moeten worden

$$\measuredangle\ (X, Y) = \kappa \log \mathrm{DV}\ (X, Y; a\mathrm{i}_1, a\mathrm{i}_2).$$

Dit is dan een hoek van rechten uit hetzelfde stuk van 't rechtenvlak; zijn waarden lopen tussen $-\infty$ en $+\infty$. Het is niet een reële hoek mod wat dan ook. In deze meetkunde is het ook niet mogelijk een hoek van halve rechten in te voeren, omdat er geen continue overgang van een halve rechte naar zijn tegengestelde is. Hoek en nevenhoek zijn in deze meetkunde niet te onderscheiden.

3 Ik heb wat nu volgt tegen een wat bredere achtergrond willen plaatsen. Komt het er alleen op aan Bruins' beweringen te weerleggen, dan kan met veel minder kennis worden volstaan.
Bruins meent in de gebruikelijke classificatie van de niet-euclidische meetkunden een lacune te hebben opgemerkt. Behalve de hyperbolische en de elliptische groep heb je nog een drieledige ondergroep van de projectieve groep, die trouwens al vaker is bestudeerd. Als absolute neemt Bruins nu een figuur bestaande uit twee punten s, a en twee rechten, S, A, zodat s met S en A incideert en a met S (dus alleen niet a met A). Bruins onderscheidt twee gevallen: het *hyperbolische,* als die figuur reëel is; het *elliptische* als dit niet zo is. De rechten S, A vormen een ontaarde (punt)kegelsnede P, de punten s, a een ontaarde (lijn)kegelsnede Q. De afstanden worden door de log DV gedefinieerd met betrekking tot P, dus

$$\kappa \log \mathrm{DV}\ (x, y; p_{xy}, p'_{xy})$$

waarbij p_{xy}, p'_{xy} de snijpunten van xy met P zijn. De hoeken worden door log DV

met betrekking tot Q gedefinieerd, dus

$$\kappa' \log \mathrm{DV}\,(X,\ Y;\ Q_{XY},\ Q'_{XY}),$$

waarbij Q'_{XY}, Q'_{XY} de rechten door s, a in de waaier van X, Y zijn.

4 Volgens Bruins vervullen beide door hem voorgestelde meetkunden alle vijf de postulaten van Euclides (Bruins zegt 'axioma's', maar ik prefereer met Dijksterhuis de gebruikelijke term 'postulaten', om 'axioma' te reserveren voor de uitspraken van het type 'het geheel is groter dan het deel'). Dat de postulaten in die meetkunden gelden, is voor Bruins hun raison d'être en hij spreekt daarom ook van niet-euclidische *euclidische* meetkunden. Bruins wil aantonen, dat men ook zonder verwerping van het vijfde postulaat (het parallellen-postulaat) afwijkende meetkunden kan krijgen, met eigenaärdige cirkels, die Zenoon voor ogen zouden hebben gezweefd, toen hij Euclides' meetkunde aan critiek onderwierp.

5 Euclides heeft echter aan zijn eerste boek niet alleen postulaten vooropgesteld, maar ook definities en axioma's. Postulaten zonder definities zouden al een vreemde zaak zijn, maar ook de axioma's mag je toch niet negeren.
Nu is het sinds lang bekend, dat alle veronderstellingen van Euclides bij elkaar niet voldoende zijn, om ook alleen maar de stellingen van Boek I te bewijzen. Het is dus geenszins verbazingwekkend, dat men afwijkende meetkunden vinden kan, die alle veronderstellingen vervullen. Voorbeelden hiervan zijn dan ook bekend. Bruins beweert – zonder schijn van bewijs – dat zijn meetkunden er ook aan voldoen. Ik ontken dit en ga deze bewering nu staven.

6 Laten we eerst het elliptische geval bekijken. De absolute zou dan niet reëel zijn. Nu is onder reële projektieve afbeeldingen – en andere komen niet in aanmerking – met elk punt ook zijn geconjugeerde en met elke rechte ook haar geconjugeerde invariant. Dus moet de absolute met s en a ook hun geconjugeerden bevatten, dus zijn s en a onderling geconjugeerd. Evenzo zijn S en A onderling geconjugeerd. Dus is S als verbinding van a en s reëel (evenzo s). Dus is de hele absolute reëel.

Conclusie: **Bruins' 'elliptische' meetkunde bestaat niet.**

7 Over blijft de hyperbolische meetkunde van Bruins. Deze is zelfduaal – door een dualiteit die s met S en a met A verwisselt, kun je in 't algemeen punten met rechten verwisselen. Aangezien deze meetkunde paren rechten bezit, die geen snijpunt hebben, zijn er ook puntenparen zonder verbindingslijn. Dus:
Bruins' meetkunde vervult het postulaat I niet.
Postulaat I luidt namelijk:*
Laat geëist worden, van elk punt naar elk een rechte lijn te trekken.

8 Het is nuttig dit nader toe te lichten, in 't bijzonder niet verbindbare puntenparen aan te wijzen.
We maakten er al op attent, dat het projektieve puntenvlak door S, A in twee stukken worden verdeeld en het projektieve lijnenvlak door s, a. Bruins verzuimt aan te geven, wat hij als punten- en lijnenvlak van *zijn* meetkunde beschouwt,

*) Geciteerd naar Dijksterhuis, evenals t.a.v. de andere postulaten.

het hele projektieve puntenvlak (lijnenvlak),
of hetzelfde zonder de *S, A (s, a)*,
of één stuk ervan, door *S, A (s, a)* bepaald.

Gezien deze uitwijkmogelijkheden moet ik Bruins in al deze gevallen afzonderlijk weerleggen. Welnu, we krijgen in de eerste gevallen, hoe dan ook:

puntenparen met afstand ∞ (rechtenparen met hoek ∞),
Puntenparen met complexe afstand (rechtenparen met complexe hoek),

ook als slechts een deel van de absolute wordt uitgesloten, hetgeen Bruins op sommige plaatsen schijnt te bedoelen (in de hoop hiermee het parallellenpostulaat te redden – zoals we later zullen zien, een ijdele hoop).

Nu is over Zenoon als wiskundige niets bekend. Ik kan dus niet met absolute zekerheid bewijzen, dat hij geen oneindige afstanden en hoeken heeft toegelaten en evenmin dat hij complexe afstanden en hoeken zou hebben afgekeurd, maar aangezien de imaginaire grootheden pas ongeveer twee millenia later zijn uitgevonden, lijkt me dit een ad hoc hypothese. Ik wil het echter niet bij historische argumenten laten. Er is ook een mathematisch argument: In 't geval van oneindige en van complexe afstanden en/of hoeken ontstaat direkt een andere strijdigheid:

Bruins' meetkunde vervult het axioma VIII niet.

Dit axioma zegt namelijk: Het geheel is groter dan het deel.

Wil Bruins niet in deze Scylla terecht komen, dan rest hem alleen de Charybdis:

tot de meetkunde zijn alleen punten toegelaten binnen één stuk van het puntenvlak tussen *S* en *A* en evenzo alleen rechten die *S* in één lijnstuk, door *s* en *a* bepaald, snijden.

Dus: twee punten, waarvan de projectieve verbindingsrechte niet door het vast gegeven projektief lijnstuk *sa* gaat, zijn niet verbindbaar.

Dit is de eerder gesignaleerde strijdigheid met Postulaat I.

9 De definitie van cirkel bij Euclides luidt: Een cirkel is een vlakke figuur, door één lijn omvat, naar welke alle rechten tot deze uit een punt, die binnen de figuur gelegen is, neerdalende aan elkaar gelijk zijn.*

Bruins beweert dat deze afstandcirkels met rechten van zijn meetkunde samenvallen. Dit is onjuist. De afstandcirkels bestaan uit *twee* lijnstukken van projektieve rechten. In de zin van Euclides' definitie zijn er dus *geen* cirkels.

Bruins' meetkunde vervult het postulaat III niet.

Dit postulaat eist namelijk: dat met elk middelpunt en elke afstand een cirkel beschreven wordt.

10 Zoals al eerder uiteengezet, worden in deze meetkunde hoeken niet mod π of mod 2π, maar van $-\infty$ tot ∞ gerekend. Ik kan niet beweren dat dit expliciet in strijd is met een van de veronderstellingen van Euclides, maar in elk geval schijnt Bruins het niet te hebben opgemerkt. Hij schrijft bij de hoekdefinitie door middel van DV klakkeloos een factor $1/2i$ over, met als enig gevolg dat nu nagenoeg *alle* hoeken van rechten, dus ook in 't zelfde stuk, complex worden.

We wezen er al op dat Bruins' hoeken niet zoals het bij Euclides hoort, hoeken van

*) Ik heb een klaarblijkelijke verschrijving van Dijksterhuis gecorrigeerd.

halve rechten, maar hoeken van rechten zijn en dat dit ook niet gerepareerd kan worden. Dientengevolge is er geen verschil tussen een hoek en zijn nevenhoek. Iedere hoek is identiek met zijn nevenhoek en volgens Euclides' definitie X (wanneer een rechte op een rechte staande, de aan elkaar grenzende hoeken aan elkaar gelijk maakt, is elk der gelijke hoeken recht . . .) zijn dus alle hoeken recht. Dus:

Bruins' meetkunde vervult het postulaat IV niet.

Dit eist namelijk: dat alle rechte hoeken gelijk zijn.

11 In Bruins' meetkunde zijn afstand- en hoekmeting van elkaar onafhankelijk. Want als men onder vasthouding van *S, a, s* de rechte *A* door *s* gaande laat variëren, blijft de hoekmeting ongewijzigd, terwijl de lengtemeting essentieel verandert – niet maar met een vaste factor. Bruins acht deze onafhankelijkheid een aanwinst. In werkelijkheid is zij de nekslag voor zijn theorie. Het is namelijk evident dat hierdoor zelfs postulaat V waar het Bruins op aan kwam, ongeldig wordt.
Neem *S, a, s* vast aan om straks nog over *A* te beschikken. Neem een rechte *R*. Hoe hoeken ook gedefinieerd zijn, er moeten rechten *X, Y* zijn, die *R* in verschillende punten en onder (willekeurig) kleine hoeken snijden; in elk geval zo dat de hoekensom kleiner dan twee rechten is.*
X, Y hebben projektief bekeken een snijpunt *z*. Ligt *z* op *S* dan hebben *X, Y* in de Bruins-meetkunde bekeken geen snijpunt. Anders neme men voor *A* de rechte *sz* (de hoekmeting wordt hierdoor niet beïnvloed). Nu ligt *z* op *A*, dus hebben *X, Y* weer in de Bruins-meetkunde geen snijpunt. Dit is in strijd met postulaat V: dat wanneer een rechte, die twee rechten treft, de binnenhoeken aan dezelfde kant kleiner dan twee rechte (hoeken) maakt, de twee rechten tot het oneindige verlengd, elkaar ontmoeten aan de kant, waar de hoeken zijn die kleiner zijn dan twee rechte.

Conclusie: **Bruins' meetkunde vervult het postulaat V niet.**

12 Bruins' artikel betoogt zo luid tegen zichzelf dat ik er liever het zwijgen toe deed. Ik publiceer dit stuk met de grootste weerzin. Er zijn gewichtige redenen waarom ik het doe. Bruins heeft analoge stukken in een aantal tijdschriften gepubliceerd (uiteraard geen mathematische tijdschriften, die zoiets direct zouden weigeren). Bij die gelegenheden heeft hij meetkundigen van Euclides tot Hilbert gekastijd, onder meer voor de onvergefelijke fout dat ze aan zijn twee meetkunden geen aandacht hebben geschonken. Ik verbeeld me niet, dat ze mijn bescherming nodig hebben, maar in elk geval hebben ze niet Bruins' aanvallen verdiend.
Een tweede reden voor mijn interventie: Bruins schijnt van mening te zijn, dat zijn vonnissen, indien er geen verzet tegen wordt aangetekend, in kracht van gewijsde gaan. Natuurlijk is dit niet zo, maar dan dient er ook af en toe op te worden gewezen.

*) Feitelijk is naar het voorafgaande de som van twee hoeken èn kleiner dan èn gelijk aan èn groter dan twee rechten.

Verscheidenheden

Prof.Dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXXV Om het punt van Lemoine

1 Het is vrijwel een eeuw geleden dat E. Lemoine aan het klassieke stel merkwaardige punten van een driehoek het punt K toevoegde, dat nu algemeen naar hem wordt genoemd.
Het heeft een aantal fraaie eigenschappen waarvan meer dan één ook als definitie geschikt is. K is het snijpunt der symmedianen, dus het aan het zwaartepunt isogonaal toegevoegde punt; de afstanden van K tot de zijden zijn evenredig met die zijden; K is het zwaartepunt van zijn eigen voetpuntsdriehoek; K is het punt waarvoor de som der kwadraten van de afstanden tot de zijden minimaal is.
Aan de laatste eigenschap verbinden wij de volgende beschouwingen, die naar het schijnt minder bekend zijn.

2 Wij onderzoeken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor de som der kwadraten van de afstanden d_1, d_2, d_3 tot de zijden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 van driehoek $A_1A_2A_3$ de constante waarde k heeft. Bij gebruik van homogene afstandscoördinaten x_1, x_2, x_3 heeft men, wegens

$$a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 = 2F, \qquad 2.1$$

waarbij F de oppervlakte van $A_1A_2A_3$ is,

$$d_i = 2F L^{-1} x_i, \qquad 2.2$$

met $L = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$.

De vergelijking van de bedoelde meetkundige plaats is dan

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - k_1 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = 0, \qquad 2.3$$

met $k_1 = k(2F)^{-2}$.
(2.3) stelt een kegelsnede voor en bij veranderlijke k een systeem S van kegelsneden dat ten duidelijkste een bundelschaar is, waartoe de dubbelgetelde oneigenlijke rechte ℓ, met vergelijking $L = 0$, behoort. Het middelpunt van (2.3), dat is de pool van ℓ, is zoals men onmiddellijk verifieert het punt.

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : a_2 : a_3, \qquad 2.4$$

dus ons punt K. Alle exemplaren van S zijn ellipsen, zij hebben ook alle

dezelfde symmetrieassen, en zij zijn gelijkvormig. Dus *het stelsel S bestaat uit homotetische* (reële of imaginaire) *ellipsen met het punt van Lemoine tot gemeenschappelijk middelpunt.* De ellips is ontaard in twee toegevoegd imaginaire rechten als K er zelf op ligt, dus als

$$k_1 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{-1} . \qquad 2.5$$

Voor een reëel punt van het vlak is

$$k \geqslant 4F^2 \, (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{-1} \qquad 2.6$$

waarbij het gelijkteken alleen voor K geldt; de minimum eigenschap van K is daarmee nog eens bevestigd.

3 Er doen zich ten aanzien van ons probleem nog twee vragen voor: wat is de (gemeenschappelijke) gedaante dezer ellipsen, dus de verhouding van hun aslengten dan wel hun numerieke excentriciteit en verder: hoe liggen de beide door K gaande symmetrieassen ten opzichte van de driehoek.
Voor de beantwoording zijn de driehoekscoördinaten minder geschikt, de discussie betreffende metrische eigenschappen kan het best met rechthoekige coördinaten plaats vinden.

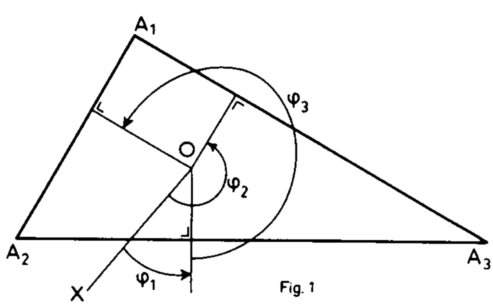


Fig. 1

Is OXY een willekeurig aangenomen assenkruis (fig. 1), φ_i de hoek die de loodlijn uit O op de zijde a_i met de X-as maakt en p_i de afstand van O tot die zijde, dan is

$$d_i = x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i - p_i , \qquad 3.1$$

zodat de vergelijking van onze ellips

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = k \qquad 3.2$$

luidt

$$a_{11} x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 , \qquad 3.3$$

met

$$a_{11} = \Sigma \cos^2 \varphi_i ,\; a_{12} = \Sigma \cos \varphi_i \sin \varphi_i ,\; a_{22} = \Sigma \sin^2 \varphi_i . \qquad 3.4$$

De andere coëfficiënten zijn voor onze vragen irrelevant.

Uit 3.4 volgt

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3)(\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_3) -$$

$$- (\cos\varphi_1 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_3 \sin\varphi_3)^2$$

$$= \Sigma (\cos^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 \sin^2\varphi_1 - 2\cos\varphi_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\varphi_2)$$

$$= \sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad 3.5$$

Nu is $\varphi_3 - \varphi_2 \equiv \pi - \alpha_1$, $\varphi_1 - \varphi_3 \equiv \pi - \alpha_2$, $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \pi - \alpha_3$, (mod. 2π) 3.6

en dus

$$D = \sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3. \qquad 3.7$$

De λ-vergelijking voor de kwadratische vorm $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$

luidt $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + D = 0$, 3.8

dus in ons geval

$$\lambda^2 - 3\lambda + D = 0, \qquad 3.9$$

met de wortels

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}(3 \pm W),$$

waarbij $W^2 = 9 - 4(\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3)$

$$= -3 + 4(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3). \qquad 3.10$$

Op grond van de bekende betrekking

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 - 2\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3, \qquad 3.11$$

volgt daaruit

$$W^2 = 1 - 8\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3. \qquad 3.12$$

Is H het hoogtepunt, M het middelpunt en R de straal van de omgeschreven cirkel, dan is volgens de goniometrie

$$MH^2 = R^2(1 - 8\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3) \qquad 3.13$$

en wij krijgen

$$\lambda_{1,2} = \frac{3R \pm MH}{2R} \qquad 3.14$$

Zijn a en b ($a \geqq b$) de halve assen van de ellips, dan is dus

$$a^2 : b^2 = (3R + MH) : (3R - MH), \qquad 3.15$$

waarmee haar gedaante bepaald is. Voor de excentriciteit e vinden wij

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2MH}{3R + MH} \qquad 3.16$$

4 Is Ψ de hoek die een symmetrieas van de ellips met de X-as maakt, dan geldt volgens de analytische meetkunde

$$\operatorname{tg} 2\Psi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \qquad 4.1$$

dus in ons geval volgens (3.4):

$$\operatorname{tg} 2\Psi = \frac{\Sigma \sin 2\varphi_i}{\Sigma \cos 2\varphi_i}. \qquad 4.2$$

Kiezen wij de X-as evenwijdig met A_2A_3, dan is

$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_3, \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha_2$ en voor de hoek Ψ_1 die een symmetrie- as met A_2A_3 maakt vinden wij

$$\operatorname{tg} 2\Psi_1 = \frac{\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_3}{1 + \cos 2\alpha_2 + \cos 2\alpha_3}, \qquad 4.3$$

en analoge uitdrukkingen voor $\operatorname{tg} 2\Psi_2$ en $\operatorname{tg} 2\Psi_3$. Als er eenvoudig verband bestaat tussen deze richtingen en andere merkwaardige rechten van de driehoek hebben wij dat niet kunnen leggen. Wij merken op dat tussen Ψ_i de volgende betrekkingen (mod. 2π) bestaan (fig. 2)

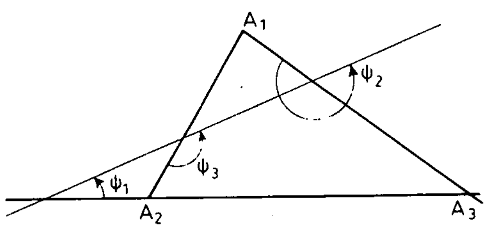


Fig. 2

$$\Psi_2 - \Psi_3 = \pi - \alpha_1, \; \Psi_3 - \Psi_1 = \pi - \alpha_2, \; \Psi_1 - \Psi_2 = \pi - \alpha_3, \qquad 4.4$$

en het is eenvoudig te verifieren dat de gevonden waarden van Ψ_i daaraan voldoen door bijvoorbeeld uit 4.3 en 4.4 de uitdrukking $\operatorname{tg} 2\Psi_2$ te bepalen.

Voor het bijzondere geval van de gelijkzijdige driehoek is $MH = 0$ en dus $e = 0$: de ellips is een cirkel.
De uitdrukkingen voor $\operatorname{tg} 2\Psi_i$ worden naar behoren onbepaald.
Voor een rechthoekige driehoek is een symmetrieas evenwijdig met de hypotenusa, terwijl voorts $a^2 = 2b^2$.

Korrel-CLXXXII

Recreatie 272

In deze opgave was sprake van een n-tal punten, waarvan elk paar door een gericht lijnstuk verbonden wordt. Daardoor kunnen drietallen (i, j, k) optreden, die cyclisch verbonden zijn, dus volgens (i, j), (j, k), (k, i) of volgens (i, k), (k, j), (j, i). Beweerd werd dat het aantal dergelijke drietallen maximaal

$(n-1)(n+1)$ is voor n even,
$(n-2)(n+2)$ is voor n oneven.

Een bewijs voor de stelling werd niet gevonden.
Van A.F. van Tooren ontvingen we het volgende elegante bewijs.

Notaties

We spreken over een gerichte graph G. Hij bestaat uit n punten en daarvan is elk tweetal verbonden door een 'pijl'.
De punten worden aangeduid met de getallen van 1 tot en met n. De pijl met beginpunt i en eindpunt j wordt aangeduid met (i, j).
Het aantal pijlen met beginpunt i noemen we b_i en het aantal pijlen met eindpunt i noemen we e_i. Het verschil $g_i = e_i - b_i$ heet het 'gewicht' van het punt i.

> Voor elke i geldt $e_i + b_i = n - 1$. Samen met $g_i = e_i - b_i$ geeft dit $e_i = (n + g_i - 1)/2$ en ook $b_i = (n - g_i - 1)/2$.
> Bij even n zijn alle g_i oneven en omgekeerd; verder is de som van alle gewichten gelijk aan 0.

Onder een 'tricykel' verstaan we een drietal punten i, j, k, met de pijlen (i, j), (j, k), (k, i) of met de pijlen (i, k), (k, j), (j, i).
Het totale aantal tricykels in de graph G noemen we T_G. Hieronder wordt bewezen dat

$$T_G = (n-1)\,n\,(n+1)/24 - \tfrac{1}{8}\,\Sigma g_i^2$$

Bewijs

We kiezen een willekeurig punt i uit. Er vertrekken uit dit punt b_i pijlen; de som van de gewichten van hun eindpunten noemen we B_i. Ook komen er in i aan e_i pijlen; de som van de gewichten van hun beginpunten noemen we E_i.
We leiden nu eerst een formule af voor het aantal tricykels, waarvan i een punt is; dit aantal noemen we T_i. De te bewijzen formule volgt dan uit $3T_G = \Sigma T_i$

De uit i vertrekkende pijlen noteren we als (i, β) en de e_i in i aankomende pijlen noteren we als (ϵ, i).
Elk van de T_i tricykels, waar i in voorkomt, bevat een pijl (i, β) en een pijl (ϵ, i) en bovendien nog een pijl (β, ϵ).
Van de $b_i e_i$ pijlen, die een β met een ϵ verbinden, hebben er dus T_i de vorm (β, ϵ) en $b_i e_i - T_i$ de vorm (ϵ, β).
Nu wordt $B_i = \Sigma\, g_\beta$ uit verschillende soorten bijdragen opgebouwd: de b_i pijlen (i, β) leveren elk een bijdrage van $+1$, evenals de $b_i e_i - T_i$ pijlen (ϵ, β); de T_i pijlen (β, ϵ) leveren elk de bijdrage -1; tenslotte leveren de pijlen die twee β's verbinden de bijdrage 0. Zo komen we tot

$$B_i = b_i + b_i e_i - T_i - T_i$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} 2T_i &= -B_i + b_i e_i + b_i \\ &= -B_i + (n - g_i - 1)(n + g_i - 1)/4 + (n - g_i - 1)/2 \\ &= -B_i + \tfrac{1}{4}(n-1)(n+1) - \tfrac{1}{4} g_i^2 - \tfrac{1}{2} g_i \end{aligned}$$

Bij het berekenen van ΣB_i bedenken we dat daarin elke g_i voorkomt en wel e_i keer. Dus

$$2\,\Sigma\, T_i = -\Sigma\, e_i g_i + \tfrac{1}{4}(n-1)\,n\,(n+1) - \tfrac{1}{4}\Sigma\, g_i^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma\, g_i$$

en dit is gemakkelijk te herleiden tot

$$2\,\Sigma\, T_i = \tfrac{1}{4}(n-1)\,n\,(n+1) - \tfrac{3}{4}\Sigma\, g_i^2$$

Maxigraphen

Om een graph te verkrijgen met daarin een maximaal aantal tricykels, moet kennelijk de som van de kwadraten van de gewichten van de n punten zo klein mogelijk zijn.
Voor oneven n (alle gewichten even) is dit eenvoudig te bereiken: maak alle gewichten gelijk aan 0. Dit gebeurt (bijvoorbeeld) indien men de pijlen richt volgens het volgende recept: bij elke i, j met $i < j$ trekt men (i, j) als $j-i$ even is en (j, i) als $j-i$ oneven is.
Het aantal tricykels is in zo'n maxigraph gelijk aan $(n-1)\,n\,(n+1)/24$.

Bij even n (oneven gewichten) laat men alleen maar $+1$ en -1 als gewichten optreden (omdat de som van alle gewichten 0 is, moeten er van elke soort $\frac{1}{2}n$ zijn). Zo'n maxigraph kan men maken door eerst een maxigraph met $n+1$ punten te construeren volgens het recept hierboven en daarna één punt met al zijn verbindingspijlen te verwijderen.
Het aantal tricykels wordt nu $(n-1)n(n+1)/24 - n/8$ of $(n-2)n(n+2)/24$.

De Eindexamens 1972-II

In het laatste nummer van de vorige jaargang konden we niet meer de opgaven van de schriftelijke examens-havo afdrukken. Ze volgen hier, ook voor de experimenterende scholen.

Wiskunde – HAVO (3 uur)

1 De functies f en g zijn voor elke reële waarde van x gedefinieerd door

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad \text{en} \quad g(x) = |2x|.$$

a Los op de vergelijking $f(x) = g(x)$.
Teken voor $-4 \leqslant x \leqslant +2$ in één figuur de grafieken van f en g.

b Op de X-as ligt een punt $P(p, 0)$ waarbij $-3 < p < -1$.
De loodlijn in P op de X-as snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B.
Bereken p voor het geval dat $AB = \frac{3}{4}$.

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven een parabool met vergelijking $y^2 = 4x$.

a Stel een vergelijking op van de lijn die door het punt (3, 2) gaat en die loodrecht staat op de raaklijn aan de parabool in het punt (4, –4).

b Stel een vergelijking op van die parabool die het punt (3, 0) tot top heeft en die hetzelfde brandpunt heeft als de gegeven parabool.

3 Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is gegeven dat $AB = AT = 8$.
Het midden van de ribbe AT is punt P en het midden van de ribbe CT is punt Q.

a Bewijs dat de lijn CT loodrecht staat op het vlak BDQ.

b Bereken de tangens van de hoek van de lijnen AT en BQ.

c Bereken de inhoud van viervlak $BDPQ$.

4 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven een lijn l met vergelijking $x - y + 4 = 0$ en een cirkel C met vergelijking

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0.$$

a Bereken de afstand van cirkel C op lijn l.

b Bereken de coördinaten van de op cirkel C gelegen punten die een afstand $1\frac{1}{2}\sqrt{2}$ tot lijn l hebben.

5 De functies f en g zijn voor $0 < x \leqslant 8$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{12}{x}$$

a Teken in één figuur de grafieken van f en g.

Op de grafiek van g ligt een punt P met x-coördinaat p.
De lijn door P evenwijdig aan de X-as, snijdt de grafiek van f in punt Q.

De lijn door P loodrecht op de X-as, snijdt de grafiek van f in punt R.

b Bewijs dat de oppervlakte van driehoek PQR onafhankelijk is van p.

c Voor welke waarde van p is $PQ + PR$ minimaal?

6 De functies f en g zijn voor $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ gegeven door

$$f(x) = \cos 2x \quad \text{en} \quad g(x) = p + 2 \sin x.$$

a Bereken voor $p = 1$ de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

b Tekeen voor $p = 1$ in één figuur de grafieken van f en g.

c Voor welke waarden van p raken de grafieken van f en g elkaar?

Wiskunde (experiment) – HAVO (3 uur)

1 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven een punt $P(0, 7)$, een lijn l :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en een lijn } m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a Bereken de cosinus van de hoek van l en m.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van l en m.

c Bewijs dat de lijn door P en S gelijke hoeken maakt met l en m.

2 De functies f en g zijn voor $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 1} \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{-5x^2}{x^2 + 1}$$

a Los op de vergelijking $f'(x) = g'(x)$.

b Bereken $f(x) - g(x)$.
Verklaar het bij *a* gevondene met behulp van deze uitkomst

c Bereken de uiterste functiewaarden van f en g.

d Teken voor $-3 \leqslant x \leqslant +3$ in één figuur de grafieken van f en g.

3 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven een cirkel c met vergelijking

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y = 0$$

en een parabool p met vergelijking

$$y^2 - 2x + 8y = 0.$$

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van c en p.

b Stel een vergelijking op van de lijn t die c in punt O raakt.
Stel een vergelijking op van de lijn die p raakt en die evenwijdig is aan t.

c Stel een vergelijking op van de beeldfiguur van p bij spiegeling in de lijn met vergelijking $x + 6 = 0$.

4 De functies f en g met domein

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$$

zijn gedefinieerd door

$$f(x) = 1 + 2 \sin x \qquad \text{en} \qquad g(x) = \cos 2x.$$

a Wat is het bereik van elk van deze functies?

b Los op: $f(x) \geqslant g(x)$.

c Teken in één figuur de grafieken van f en g.

5 Van een kubus $ABCD\text{-}EFGH$ is de ribbe 8.
Kies een geschikt assenstelsel.

a Stel een vectorvergelijking op van het vlak ACH.
Stel een vectorvergelijking op van het vlak DEG.

b Bereken de cosinus van de hoek van de vlakken ACH en DEG.

c Stel een vectorvergelijking op van de snijlijn van de vlakken ACH en DEG.

d Bereken de afstand van punt F en vlak ACH.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Bespreking eindexamens

Evenals vorige jaren organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren voor alle belangstellenden forumbesprekingen van eindexamens nieuwe stijl voor v.w.o., h.a.v.o., m.a.v.o.4, m.a.v.o.3 en T-stroom van het l.t.o.
Deze besprekingen zullen gehouden worden aan de hand van de eindexamens 1972.
Voor het v.w.o. op 9 september te Utrecht.

Voor het h.a.v.o. op
 9 september te Utrecht
 23 september te Roermond
 30 september te Haarlem
 7 oktober te Zwolle
 14 oktober te Breda.

Voor m.a.v.o.4, m.a.v.o.3 en T-stroom van het l.t.o. op
 9 september te Utrecht
 23 september te Roermond
 30 september te Haarlem
 7 oktober te Zwolle
 14 oktober te Breda
 27 oktober te Leeuwarden.

De bijeenkomsten worden gehouden:
Utrecht: Transitorium I van het Universiteitscentrum De Uithof.
Roermond: Pedag. Academie Dr. van Gils, Burg. Geeljanslaan 16 (vlak bij de T.V. toren).
Haarlem: Coornhertscholengemeenschap, Chrysanthemumlaan 18 (bij de Westelijke Randweg en het N.S. station Heemstede-Aerdenhout).
Zwolle: Carolus Clusius College, Veerallee 17 (ca. 7 minuten van het station).
Breda: Hotel Cosmopolite, Julianazaal, Stationsplein 4.
Leeuwarden: M.a.v.o. de Nijlân, Prinsesseweg 2.

Voor de v.w.o.-bijeenkomst zijn de tijden:
 13.30 uur tot 17.00 uur.
Voor de h.a.v.o.-bijeenkomsten zijn de tijden:
 10.00 uur tot 12.30 uur.
Voor de m.a.v.o./l.t.o.-bijeenkomsten zijn de tijden:
 13.30 uur tot 17.00 uur.
Voor de bijeenkomsten te Utrecht zal om 9.30 uur en 13.00 uur een extra bus van het station Utrecht C.S. naar de Uithof rijden.

Notulen van de Algemene Vergadering

Van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 16 oktober 1971 in het 'Transitorium II' van het Universiteitscentrum 'De Uithof' te Utrecht.

Om 10.45 uur opent de voorzitter, dr. J.K. van den Briel de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom het erelid dr. Joh. H. Wansink, de inspecteurs dr. D.N. van der Neut, E.H. Schmidt en N.J. Zimmerman, de sprekers drs. H.G.B. Broekman, G. Krooshof (tevens als vertegenwoordiger van Euclides), drs. A.J.Th. Maassen, en de vertegenwoordigers van Liwenagel, D. Leujes en Wolters-Noordhoff, drs. A.B. Oosten.
Hierna spreekt de voorzitter zijn jaarrede uit; deze is gepubliceerd in Euclides.

De notulen van de algemene vergadering van 19 december 1970, de jaarverslagen en de begroting 1971/1972 worden goedgekeurd. De penningmeester wordt décharge verleend; in de kascommissie worden benoemd mej.drs. S. Vrijburg en de heer L.J.M. van der Zijden.

Zonder stemming worden de heren L.A.G.M. Muskens en dr. P.G.J. Vredenduin als bestuurslid herkozen.

De contributie voor het jaar 1972/1973 wordt vastgesteld op twintig gulden. De penningmeester wijst er op dat gezien de stijging van de kosten van 'Euclides' een verdere verhoging van de contributie een van de volgende jaren niet te vermijden is.

De vergadering wordt hierna in twee delen gesplitst en de heer G. Krooshof krijgt het woord over *'Relaties en afbeeldingen'* en de heer drs. A.J.Th. Maassen over *'Riemann-integreerbaarheid en primitiveerbaarheid'*.

Na de middagpauze heet de voorzitter allereerst hartelijk welkom de vertegenwoordigers van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraars, dr. R. Holvoet en echtgenote.
Vervolgens geeft hij het woord aan drs. H.G.B. Broekman over *'Strategie van enkele meetkunde-methodes'*.

Door de levendige discussie naar aanleiding van deze voordracht blijft er maar weinig tijd voor de rondvraag over.

Van mej. D. Savelkoul en de heer R. Oomes komt schriftelijk de volgende vraag binnen:

Er van uitgaande, dat het minimum aantal uren voor een bepaald vak op een bepaalde opleiding zodanig moet zijn, dat de gemiddelde leerling zich de geboden stof redelijk eigen kan maken, stellen wij de volgende vragen:

1 Welke wiskundigen hebben de huidige minimum-urentabel h.a.v.o. voorgesteld in Lochem?

Klasse	B	2H	3H	4H	5H
Min. aantal uren	4	3	3	4	4

2. Is het nu ook in Lochem bekend, dat slechts *goede* leerlingen het h.a.v.o.-programma wiskunde in het vastgestelde minimum aantal uren kunnen volbrengen?
Realiseert men zich ook in Lochem dat deze goede leerlingen òf op het v.w.o. zitten òf zo snel mogelijk naar het v.w.o. overstappen?
3 Wordt er in Lochem iets ondernomen òf om het minimum aantal uren te vergroten òf om de eindexamen-eisen te verlagen?
4 Meent u dat het mogelijk is de wiskundeboeken voor h.a.v.o. dusdanig te herzien, dat de gemiddelde leerstof, nodig om aan de exameneisen te voldoen, in het te Lochem vastgestelde minimum aantal uren kan verwerken?
5 Meent u met ons, dat, gezien de grote discrepantie tussen het minimum aantal uren en de hoeveelheid aangeboden leerstof, de *verantwoordelijkheid* voor het toekennen van uren boven dit minimum aantal, gedragen dient te worden door Lochem in plaats van door het Bevoegd Gezag van elke school afzonderlijk?
6 Meent u niet dat genoemde punten op zeer korte termijn geregeld dienen te worden, daar anders het wiskundig àspect van de h.a.v.o. al bij voorbaat geen reële kans krijgt om tot ontwikkeling te komen?

De voorzitter antwoordt dat de minimumtabellen niet bedoeld zijn voor leerlingen die eindexamen doen in genoemde vakken. Een minimum urenaantal voor wiskunde van 10 is voor hen, die geen eindexamen wiskunde doen. Over de verdere toekenning beslist het bevoegd gezag van de school. De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde adviseert 5 uren in de 4e en 5e klas h.a.v.o.

Het leerplan is gebaseerd op een urenaantal van 34 per week; dit is al tot 32 teruggebracht en de voorzitter vraagt zich af wat de toekomst zal brengen.
De Raad van Vakgroepen zal al het mogelijke moeten doen om te zorgen dat het urenaantal in overeenstemming blijft met de eisen die aan de examenkandidaten worden gesteld.
De heer D. Leujes vraagt of het programma voor wiskunde toch niet overladen is. Wie moet hierop wijzen en waar moet men beperken?
De heer drs. H.G.B. Broekman zegt dat het leerplan door de verschillende auteurs op verschillende manieren wordt geïnterpreteerd. De interpretatie bepaalt de inhoud van hun boeken. Hij vraagt zich af of de boeken niet overladen zijn.
De heer Leujes zegt dat men zo goed mogelijk het leerplan uitwerkt. Men vraagt zich steeds af wat er nog kan vervallen en wat nog betekenis heeft voor de natuurkunde.
De heer L.A.G.M. Muskens vraagt of de vereniging geen gesprek met de auteurs kan hebben.
De voorzitter deelt mee dat buiten de vereniging al een gesprek is geweest, maar dat dit misschien verder via de vereniging kan. De heer Muskens vraagt dit vooral ook voor de bovenbouw h.a.v.o.

De heer N.J. Zimmerman dankt namens de inspectie voor de uitnodiging, ook aan de gepensioneerde inspecteurs. Hij vindt dat door het 'elk wat wils'-programma ook de m.a.v.o.-docenten in de vereniging worden geïntegreerd. Hij dankt voor de regionale m.a.v.o.-bijeenkomsten die zeer aan hun doel hebben beantwoord.

De heer dr. R. Holvoet dankt namens de Belgische Vereniging van Wiskundeleraars voor de uitnodiging. Hij hoopt dat hierdoor nog grotere samenwerking in het wiskunde-onderwijs ontstaat.
De heer D. Leujes dankt namens Liwenagel voor de uitnodiging.
De heer G. Krooshof vraagt om meer verslagen van bestuursvergaderingen dan het vorige verenigingsjaar. Hij wil dat leden via 'Euclides' op de hoogte blijven van de bestuursactiviteiten.

Om 16.00 uur sluit de voorzitter de vergadering.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1971 - 31 juli 1972

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. J.K. van den Briel, secretaris drs. J.W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, L. van Beek, M. Kindt, L.A.G.M. Muskens, dr. P.G.J. Vredenduin.

Op 11 en 12 augustus werd te Amsterdam en op 12 en 13 augustus werd te Eindhoven de vakantiecursus van het Mathematisch Centrum gehouden met als onderwerp: 'De ontwikkeling van de wiskunde in de afgelopen 25 jaar'. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren was vertegenwoordigd in de adviescommissie.

Op 4 september werd te Utrecht een forumbijeenkomst gehouden over de wiskunde-eindexamens voor het v.w.o. in 1971, waarbij tevens informatie werd verstrekt over het experimentele eindexamen voor h.a.v.o.
In september en oktober werden te Utrecht, Breda, Zwolle, Weert en Haarlen forum-bijeenkomsten over de moderne wiskunde-eindexamens in 1971 voor m.a.v.o.-3 en m.a.v.o.-4 gehouden.

De jaarvergadering is gehouden in De Uithof te Utrecht op 16 oktober 1971; sprekers waren drs. H.G.B. Broekman, G. Krooshof en drs. A.J.Th. Maassen. De presentielijst werd getekend door 65 personen.

Op 8 en 15 november werden te Haarlem en Breda regionale voorlichtingsbijeenkomsten

georganiseerd over het Wiskobas-project. Een bijeenkomst te Meppel moest op het laatste ogenblik worden afgelast.

Op 17 februari 1971 overleed op 99 jarige leeftijd P. Wijdenes, erelid van de vereniging.

In het januari-nummer van 'Euclides' verscheen het tweede interim-rapport van de nomenclatuurcommissie.

Namens de vereniging is drs. B.J. Westerhof tot de redactie van 'Euclides' toegetreden.

Met Wolters-Noordhoff N.V. is een contract aangegaan betreffende het uitgeven van een verzameling 'Eindexamenopgaven v.w.o.'.

Het bestuur vergaderde dit jaar acht maal.

Mathematisch Centrum

Oriënterend Colloquium voor leraren

Gedurende het cursusjaar 1972-1973 zal door het Mathematisch Centrum een cursus *Differentiaalvergelijkingen* worden gegeven. Deze cursus is met name bestemd voor wiskundeleraren uit Amsterdam en omgeving en is vrij toegankelijk voor alle belangstellenden. De leiding berust bij mej. drs. J.M. Geijsel (Afd. Zuiver Wiskunde). Van de te behandelen stof zal aan de deelnemers een syllabus worden uitgereikt. Deze cursus beoogt een inleiding te geven in de gewone differentiaalvergelijkingen, waarbij in verband met de opname van dit onderwerp in het analyseprogramma van het VWO speciale aandacht zal worden gegeven aan de hiervoor belangrijkste aspecten, o.a.

differentialen en differentiaalvergelijkingen,
differentiaalvergelijkingen van families van krommen,
oplossingsmethoden, waaronder numerieke,
lineaire differentiaalvergelijkingen.
trillingen.

De cursus vindt plaats *wekelijks* op de woensdagavonden van september t/m half november.
Hervatting: januari 1973.
Aanvangsdatum: 6 september 1972
Tijd: 19.45 (precies) tot 21.30 uur
Plaats: Mathematisch Centrum, grote collegezaal.

Leraren, verbonden aan door het Ministerie van Onderwijs gesubsidieerde onderwijsinstellingen kunnen hun reiskosten (op basis treinkosten 2e klasse) declareren bij de administratie van het Mathematisch Centrum, indien zij gedurende het studiejaar 1972-1973 meer dan de helft van het aantal bijeenkomsten hebben bijgewoond.
Deelnemers aan de cursus gelieven zich op te geven bij de administratie van het Mathematisch Centrum vóór 1 augustus 1972. (tst. 64)

Administratie Mathematisch Centrum

STAATSEXAMEN GYMNASIUM 1971

Uit het verslag

WISKUNDE

Het gemiddelde van de dit jaar door de A-kandidaten behaalde cijfers voor algebra bedraagt 5,3 en voor meetkunde 5,2.
Vorig jaar waren de gemiddelden voor deze vakken resp. 5,3 en 5,4.
Van de 212 A-kandidaten waren er 32, die voor algebra het cijfer 3 of lager behaalden; bij meetkunde was dit het geval bij 36 kandidaten.
De subcommissie wijst er nogmaals op, dat de kandidaten goed voorbereid aan het examen voor wiskunde moeten deelnemen. Bij het onderwerp 'logaritmen en rijen' behoort het gebruik van de logaritmentafel of de rekenliniaal. Bij planimetrie bleken heel wat kandidaten hiaten te hebben in hun kennis van onderwerpen als: meetkundige verzamelingen, het verband tussen hoeken en bogen, verhouding van oppervlakten. De subcommissie vestigt er de aandacht op dat men de formule

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

en de cosinusregel dient te kennen.
De toekomstige A-kandidaten wordt aangeraden zich goed op de hoogte te stellen van de exameneisen en vooral van de opmerkingen in de examenverslagen van de voorafgaande jaren.
Bij de B-examens bleven veel examinandi onder de maat. Dit bleek al bij het corrigeren van het schriftelijk werk, vooral bij het onderwerp stereometrie.
De gemiddelden van de eindcijfers wiskunde voor de B-kandidaten waren dit jaar als volgt:
voor algebra 5,9 (vorig jaar 5,5); voor stereometrie 5,4 (vorig jaar 6,0) en voor goniometrie en analytische meetkunde 5,6 (vorig jaar 5,4).

STAATSEXAMEN HBS-HAVO-1971

Uit de Verslagen

HBS-A

Wiskunde

Het schriftelijk examen vertoonde dezelfde tendensen als vorige jaren; ondanks de soepele normen was het aantal lage en zeer lage cijfers groot; één van de oorzaken is naar de mening van de commissie, dat een groot aantal kandidaten zich slechts voor één van de onderdelen, algebra of meetkunde, geprepareerd hebben. Ongelukken dan niet uitblijven.
Bij het mondeling examen is gebleken, dat de meeste kandidaten zich slecht hebben voorbereid. Enig vertrouwen in eigen kunnen was ver te zoeken zodat bij eenvoudige vragen de kandidaat zelf voor de nodige complicaties zorgde. Daardoor verliep het examen traag en

konden meestal maar enkele onderwerpen uit de algebra en de meetkunde ter sprake komen. Over het algemeen was bij de algebra de kennis van de formule zeer matig, waarbij de betekenis van de in die formule voorkomende grootheden voor velen een duistere zaak was. Definities van de goniometrische verhoudingen, van de logaritmen enz. werden over het algemeen slecht gekend; geen wonder dat dan eenvoudige toepassingen niet gemaakt konden worden.
Hoewel bij de meetkunde de meeste kandidaten de stellingen wel kenden bleek de toepassing in een figuur veelal op grote moeilijkheden te stuiten. De toekomstige kandidaten dienen zich toe te leggen op het goed lezen van een meetkundig figuur, terwijl zij de daarbij verstrekte gegevens op juiste wijze dienen te interpreteren.
Wel moet gezegd worden, dat een klein aantal kandidaten een zeer bevredigend examen aflegde; zij hadden zich blijkbaar de nodige inspanning getroost om de stof, voor zover mogelijk, tot hun eigendom te maken.

HBS- B

Algebra

1 Bij het oplossen van logaritmische ongelijkheden blijken zeer veel kandidaten zich niet bewust te zijn van de invloed van het grondtal; ook de existentievoorwaarden van ${}^{g}\log a$ zijn vaak onbekend.
2 Voor veel kandidaten bleek bij funkties het onderscheid tussen definitieverzameling en waardeverzameling niet duidelijk te zijn, zelfs niet voor eenvoudige funkties als $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ e.d.
3 Door alle kandidaten op één na werd als nodige en voldoende voorwaarde voor het optreden van een extreem in een inwendig punt van het definitiegebied van een funktie genoemd $f'(x) = 0$.
Het kostte meestal 10 minuten uitleg vóór de kandidaten inzagen dat dit niet juist was. Men moet de kandidaten te moeizaam op het spoor brengen dat de tekenwisseling van de eerste afgeleide nodig en voldoende is voor het optreden van een extreem.
4 Praktisch alle kandidaten antwoorden in eerste instantie dat een kwadraat altijd positief is. Ze zijn er moeilijk toe te brengen ook het getal 0 als mogelijke uitkomst toe te voegen.
5 De kandidaten kennen de formule van de som van een convergente meetkundige rij, maar zijn zich niet bewust dat dit de limiet is van de som van k termen, als k nadert naar oneindig.
6 Elke kandidaat dient te weten dat de macht van een positief getal altijd groter is dan nul. Dit voorkomt oneindige problemen bij het oplossen van ongelijkheden van 't type.
7 Bij het berekenen van oppervlakken d.m.v. integreren kennen de kandidaten het trucje wel, maar ze weten niet goed wat ze eigenlijk doen, n.l. dat de oppervlakte berekend wordt als limiet van de som van een aantal rechthoekjes die steeds smaller worden genomen.

Slotopmerking: De commissie zou gaarne zien, dat de door haar gemaakte opmerkingen tijdens de opleiding de kandidaten ter kennis worden gebracht, mede om te voorkomen, dat het examen teveel gelijkenis gaat vertonen met het geven van bijlessen in het te examineren vak.

Stereometrie

Het schriftelijk onderdeel van het examen was ook dit jaar zeer slecht gemaakt, er waren dan ook weinig voldoende cijfers. Als oorzaak waren o.a. aan te wijzen de moeilijkheden die men had bij het maken van een behoorlijke figuur overeenstemmend met de gegevens, zodat de

oplossing van het vraagstuk onnodig ingewikkeld werd. Ook bij het opstellen van een bewijs vergat men vaak de verbindende tekst, zodat veel aan de fantasie van de examinatoren werd overgelaten!
Er was ook dit jaar weer opvallend gebrek aan kennis van de meest elementaire zaken, zoals de definities van de hoek tussen twee kruisende lijnen en de hoek tussen een lijn en een vlak, de gegevens die een bol bepalen, het tekenen van doorsneden van vlakken met oppervlakken en lichamen. Het feit dàt een lijn, die gelijke hoeken maakt met twee snijdende vlakken, ook evenwijdig mag zijn met een der deelvlakken was voor velen een vreemde zaak.
Onmisbare onderdelen uit de planimetrie, zoals de bijzondere rechthoekige driehoeken, eigenschappen van ruit en rechthoek, het begrip macht, werden vaak onvoldoende gekend.
Tenslotte nog de opmerking, dat men niet alleen van het bestaan van een stelling of eigenschap moet weten, maar dat men ook in redelijk proza de inhoud moet kunnen vertellen.

Goniometrie en Analytische Meetkunde

Aan de orthogonale hyperbool met vergelijking $xy = a$ hebben vele kandidaten te weinig aandacht besteed. De vergelijking van de poollijn was o.a. niet bekend. Het bleek voor vele kandidaten moeilijk te zijn om een meetkundig gegeven om te zetten in een algebraïsche betrekking.
Ook bleek er weinig inzicht te zijn bij het oplossen van vraagstukken over puntverzamelingen. De kandidaten realiseren zich niet, dat het daarbij gaat om een betrekking tussen de coördinaten van die punten te bepalen. Dit kwam vooral tot uitdrukking bij de wijze waarop zij een parameter wilden elimineren.
Herhaaldelijk bleek dat een kandidaat het verband tussen het samenvallen van twee lijnen en de afhankelijkheid der vergelijkingen niet kende.
Veel fouten kwamen voor bij het oplossen van ongelijkheden. De kandidaten vervingen de ongelijkheden voor vergelijkingen, losten die op, en voegden dan op goed geluk de tekens 'groter' en 'kleiner' toe.
Er werd opvallend weinig gebruik gemaakt van een grafiek.
De mogelijkheid om elementaire goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden op te lossen m.b.v. de eenheidscirkel was bij de kandidaten nauwelijks bekend.

HAVO
Wiskunde

Het is de commissie opgevallen dat er zoveel verschil was in de zorgvuldigheid waarmee de kandidaten zich op het examen hadden voorbereid. Naast kandidaten, die blijk gaven van grondige voorbereiding, waren er ook, waarbij deze onvoldoende of zelfs slecht was. Het kwam zelfs voor dat de stof van de eerste klas van een school voor havo niet beheerst werd.
Voorts kreeg de commissie soms de indruk, dat de opleiding te veel opgegaan was in een training in het maken van vraagstukken. Dit soort voorbereiding kan nog wel eens goede resultaten bij het schriftelijk gedeelte van het examen opleveren. Wanneer echter bij het mondelinge gedeelte een onderzoek wordt ingesteld naar het begrip van wat er gedaan wordt blijkt het resultaat doorgaans tegen te vallen. Dit verklaart het feit, dat de cijfers voor het mondelinge deel van het examen zo vaak lager zijn dan die voor het schriftelijk werk.

Enkele voorbeelden mogen ter illustratie dienen.
De techniek van het differentiëren van eenvoudige algebraïsche en goniometrische functies was vaak voldoende, maar zelfs een voorzichtig gestelde vraag naar wat nu eigenlijk differentiëren is liep bijna altijd direkt op een teleurstellend antwoord uit.
Met moeite en veel hulp kon soms de definitie van een parabool aan een kandidaat ontwron-

gen worden terwijl dezelfde kandidaat soms goed met de vergelijking van een parabool kon opereren. Ook kwam het voor, dat de definitie van een parabool vlot gegeven werd, maar dat deze niet toegepast kon worden op een eenvoudig vraagstuk.
Verder is het de commissie opgevallen, dat de terminologie van vele kandidaten tekort schoot, hetgeen uiteraard nadelig op de begripsvorming heeft moeten werken. Het onderscheid tussen 'functie, 'vergelijking' en 'ongelijkheid' was bij vele kandidaten maar wazig aanwezig. De uitdrukkingen 'nulpunt van een functie', 'wortel van een vergelijking' en 'snijpunt van een grafiek met de X-as' werden soms hopeloos door elkaar gehaald. Ook het gebruik van een uitdrukking als 'horizontaal buigpunt' in plaats van 'buigpunt met een horizontale raaklijn' moet hier als niet-tolerabele slordigheid vermeld worden.
Hoewel het programma van het staatsexamen havo nadrukkelijk als onderwerp voor wiskunde vermeldt 'inleiding tot de theorie van de verzamelingen' bleken vele kandidaten daar niet of nauwelijks van gehoord te hebben. Dit jaar heeft dit geen invloed gehad op de bepaling van het cijfer voor het vak wiskunde; in de toekomst zal dit echter het geval kunnen zijn.

Boekbespreking

Arno Mitschka, *Schülerleistungen im Rechnen zu Beginn der Hauptschule*, eine empirische Untersuchung, Auswahl Reihe B, nr. 42, 136 blz.; ingen. DM 9,60, Hermann Schroedel Verlag, Hannover, 1971.

Dit is een verslag van een experiment, uitgevoerd in opdracht van het Kultusministerium Nordrhein-Westfalen. Aan de hand van een tweetal rekentests (Sachrechnen) worden de rekenprestaties onderzocht aan het begin van het vijfde schooljaar. De uitkomsten veroorloven een oordeel over het niveau van het rekenonderwijs in de Grundschule, over de doelstellingen van dat onderwijs en de gevolgde werkmethoden.
In de conclusies wordt allereerst gewezen op het tekortschieten van het traditionele onderwijs aan grote klassen (Frontalunterricht), waarbij de zelfwerkzaamheid van de leerlingen in het gedrang komt. Voorts op de pragmatische beperking van de leerstof tot praktisch rekenen en cijfervaardigheid, op het ontbreken van een aanschouwelijke grondslag bij tal van drilmethoden, op een verontachtzamen van logische strukturen, op een te weinig rekening houden met de uitkomsten van de leerpsychologie, op een verwaarlozen van de motivatie, zoals die via speelsituaties zou kunnen worden opgevoerd, op de te beperkte doelstellingen van het huidige onderwijs op de Volksschule. Er wordt aangedrongen op een nieuwe formulering van de doelstellingen van het onderwijs in de eerste vier leerjaren, rekening houdend met moderne didactische inzichten. In de aanbevelingen voor verbeteringen verraden daarbij de aanbevelingen van de negenproef (en zelfs van de 'elf-proef') een te grote waardering voor het traditionele.
Het verslag verdient de aandacht van alle docenten, die zich met de problematiek van de wiskunde op de basisschool bezighouden.

Joh. H. Wansink

Güntsch-Schneider. Einführung in die Programmierung digitaler Rechenautomaten. de Gruyter. Berlijn 1970. 58 DM.

Drie aspekten van de programmering komen aan de orde, te weten:

a) programmering van een bepaalde machine, men noemt dit wel 'harde' programmering,
b) programmering in een hogere programmeertaal zoals Algol of Fortran,
c) basisprogramma's, dat zijn programma's die door de fabrikant worden aangeboden bij wijze van (vaak betaalde) service zoals vertalende programma's en bedrijfssystemen.

Voor de niet-Duitse lezer zal het een nadeel zijn dat de auteurs zich bij de behandeling van a) richten op de TR 440, een hoofdzakelijk in Duitsland gebruikte machine.
Over de talen Algol en Fortran zijn al vele goede boeken verschenen en de onderwerpen die onder c) vallen zijn te complex om in 100 bladzijden behandeld te worden.
Is de keuze van de inhoud van het boek dus niet gelukkig, de manier waarop e.e.a. wordt beschreven is helder en dat zal wel de reden zijn dat dit al de derde druk is.

Drs. D. Oudhoorn

W.I. Layton. *College Arithmetic.* John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Second Edition, 236 blzn. £3.50

Volgens de auteur is dit boek hoofdzakelijk bestemd voor aankomende studenten, die het begrip en de vaardigheid missen om praktische kwantitatieve problemen aan te pakken.
In ruim 200 bladzijden wordt een hoeveelheid stof behandeld, die in Nederland grotendeels in het basisonderwijs is opgenomen, terwijl de rest niet hoger grijpt dan de wiskunde in de eerste twee leerjaren van ons voortgezet onderwijs.
Verder hoopt de schrijver, dat bestudering van het boek aanleiding kan geven tot het verder doordringen in enkele onderwerpen uit de hogere of de moderne wiskunde.
Het boek is voorzien van vele vraagstukken met een antwoordenlijst aan het eind.
In ons land bestaat m.i. geen behoefte aan een dergelijk boekwerk.

J.J. Wouters.

Milton D. Eulenberg, Theodore S. Sunko. *Inquiry into College Mathematics.* John Wiley and Sons, Inc. New York, London, 331 bladzn, 70 sh.

De schrijvers hebben met dit boek een zeer verdienstelijke poging ondernomen om aankomende studenten de elementen van de moderne wiskunde bij te brengen en tevens belangstelling daarvoor te kweken. Zij richten zich voornamelijk tot de non-science studenten, die een semestercourse van drie tot zes lesuren moeten volgen.
De inhoud kan in drie delen worden gezien.
Het eerste deel houdt zich bezig met getallentheorie, ingeleid door een uiteenzetting over logische systemen en verzamelingen.
De getallensystemen worden netjes opgebouwd, beginnend bij de axioma's van Peano. Daaruit komen later met gebruikmaking van getallenparen de gehele en de rationale getallen te voorschijn.
De reële getallen komen slechts intuïtief aan de orde.
Het 2e deel bestaat uit één hoofdstuk over de fundamentale eigenschappen van meetkundige figuren.
Dit onderdeel blijft op een laag niveau. In het derde gedeelte worden de funkties behandeld met daaruit voortvloeiend de vergelijkingen. Een hoofdstuk over statistiek en een hoofdstuk: 'What is modern mathematics?' (boolean algebra, linear programming, finite geometry, transfinite numbers) besluiten het boek.
Er zijn 50 paragrafen met vraagstukken opgenomen, waarvan de helft van antwoorden voorzien.
Voor leraren, die een naslagwerk willen hebben, om er ideeën voor de lessen uit op te doen, kan het een heel bruikbaar boek zijn.

J.J.Wouters.

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, XXIII^{6} - XXIV^{4}, september 1970-juni 1971.

H. Tietz, Bemerkungen zur Modernisierung des Mathematikunterrichts;
W. Abromeit, Grundlegende Begriffe der Informationstheorie im Unterricht;
D. Jost, Eine ganz elementare Flächenberechnung und ihre physikalische Anwendung.

J. Schmidt, Berechnung von Integrale durch Grenzwerte;
D. Wode, Logische Aspekte der Umgangssprache im Mathematikunterricht;
J. Weninger, Zur Formulierung empirischer Gesetze;
W. Winnenburg und H. Schmidkunz, Gezeitenkräfte.

D. Botsch, Die Pädagogische Hochschule auf falschem Kurs;
A. Oberschelp, Logisches und Terminologisches über Funktionen;
J. Rekveld, Neue Gesichtspunkte zum Unterricht über spezielle Relativitätstheorie;
Fr. Mutscheller, Zur geplanten Rahmenvereinbarung für die Lehrerbildung.

F. Schaale, Die Perioden der Dezimalbrüche;
G. Steinberg, Der Mathematikunterricht in der 10. Klasse des Gymnasiums;
R. Müller, Polyeder und ihre algebraische Darstellung;
H. Walter, Unterrichtserfahrungen mit Inzidenzstrukturen im Geometrieanfangsunterricht am Gymnasium;
H. Meier, Die Bedeutung der Programmsprachen für den Mathematikunterricht am Gymnasium.

H. Frasch, Ein Reziprozitätssatz der Toto-Mathematik;
K. Seebach, Zahlbereichserweiterungen mit Hilfe von Operatoren;
A. Steiner, Zur Einführung der ganzen Zahlen;
H. Schumann, Ueber den Flacheninhalt von Gitterpolygonen;
H. Holt, Ueber Abbildungen zum Iterationsverfahren.

Fr. Mutscheller, 62. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Forderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts;
J. Weniger, Normung der Gröszen die die Zusammensetzung von Mischphasen beschreiben;
H. Athen, Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf einfache stochastische Prozesse;
J. Bruhn, Datenverarbeitung im Unterricht.

H. Stork, Die unbewältigte Technik;
J. Schmidt, Die Ringstruktur der Zahlenfolgen;
V. Hagemeister, Reform des naturwissenschaftlichen Unterrichts durch Präzisierung von Lernzielen;
J. Schönbeck, Synthetische und analytische Geometrie;
I. Wolf, Relativitätstheorie im Gymnasium.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin. Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

280 Ditmaal een echte opgave voor puzzelaars. Met zes lucifers kan men twee gelijkzijdige driehoeken leggen. Gevraagd wordt met deze zes lucifers een zeshoek te leggen, waarvan de oppervlakte gelijk is aan de som van de oppervlakten van beide driehoeken. (Geen trucjes, dus niet b.v. lucifers breken.)
(B. Kootstra)

281 Gegeven is het volgende getallenpatroon:

0	1	4	7	17	10	3	2	1	0									
	0	1	2	5	3	1	1	1	1	0								
		0	1	3	2	1	2	3	4	1	0							
			0	1	1	1	3	5	7	2	1	0						
				0	1	2	7	12	17	5	3	1	0					
					0	1	4	7	10	3	2	1	1	0				
						0	1	2	3	1	1	1	2	1	0			
							0	1	2	1	2	3	7	4	1	0		
								0	1	1	3	5	12	7	2	1	0	
									0	1	4	7	17	10	3	2	1	0

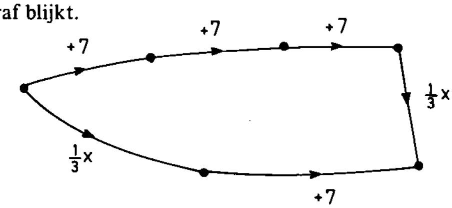
enz.

Het patroon is zo samengesteld, dat
a alle getallen, behalve de uiterste, positief geheel zijn;
b elk vierkant van vier getallen determinantwaarde 1 heeft.
Er wordt gevraagd:
a hoe stelt men een dergelijk patroon samen?
b hoe komt het dat de kolommen uit dezelfde series bestaan als de rijen?
c hoe komt het dat het patroon repeteert?
(Mevr. B.C. Dijkstra-Kluyver)

278 Door middel van een minimaal aantal bewerkingen in IN (alleen vermeerderen met 7 en delen door 3) uitgaande van 13 het getal 14 bereiken. Ook van 226 uitgaande 117 bereiken.
Reken modulo 21. Door bij 13 telkens 7 op te tellen bereikt men 20 en 6.
Door te delen door 3 bereikt men 2.
Door nu weer telkens met 7 te vermeerderen bereikt men 9 en 16.
Deling door 3 levert 3. Enz.
Zodat men achtereenvolgens kan bereiken:

6	13	20
2	9	16
3	10	17
1	8	15
5	12	19
4	11	18
6	13	20

Uitgaande van 13 bereikt men dus elk getal, dat geen veelvoud van 7 is. De veelvouden van 7 zijn echter onbereikbaar. Het is dus niet mogelijk 14 te bereiken.
Nu van 226 naar 117. Dus modulo 21 van 16 naar 12. Bovenstaande tabel leert ons, dat we driemaal door 3 moeten delen. Het is voordelig deze delingen zo snel mogelijk uit te voeren, zoals uit onderstaande graf blijkt.



Dus gaan we als volgt te werk: 226, 233, 240, 80, 87, 29, 36, 12, 19, 26, 33, . . ., 117.
Er kunnen zich nog enkele kleine complicaties voordoen, maar die kan de lezer zonder moeite zelf oplossen.

279 Uit een zak met 4 witte of blauwe knikkers worden er 2 getrokken die beide wit zijn. Hoe groot is de kans dat een derde getrokken knikker wit is?
Deze kans te berekenen als je na de trekking van het eerste paar te horen krijgt dat van de 4 knikkers er minstens één wit is en ook als je die mededeling niet krijgt. Lewis Caroll berekent – zie het vorige nummer – resp. $\frac{7}{12}$ en $\frac{1}{2}$.
Laten we eerst het geval 1e nog eens op een andere manier proberen uit te rekenen. Als we van niets weten, zijn er vijf mogelijkheden, nl. WWWW, WWWB, WWBB, WBBB, BBBB. Nu we weten, dat er minstens één witte knikker aanwezig is, vervalt de laatste mogelijkheid. De kansen a priori op de eerste vier gevallen zijn dus $\frac{1}{15}, \frac{4}{15}, \frac{6}{15}, \frac{4}{15}$. Redeneert men nu verder zo, als Lewis Caroll dat in zijn oplossing gedaan heeft, dan vindt men als kans op het trekken van een derde witte knikker $\frac{1}{2}$. Men vindt nu dus dezelfde uitkomst als in geval 2e.
Hieruit blijkt, dat de discrepantie veroorzaakt wordt door de manier, waarop de kansen a priori berekend worden. Blijkbaar heeft L.C. in het geval 1e deze kansen als volgt berekend. Hij weet, dat er minstens één witte knikker aanwezig is. Hij stelt zich nu voor, dat de zak op de volgende manier met knikkers gevuld is: eerst is er één witte knikker in gedaan en daarna zijn hier op willekeurige wijze drie knikkers aan toegevoegd, welke alle drie een even grote kans hebben wit of blauw te zijn.
In het tweede geval wordt ondersteld, dat de zak met vier knikkers gevuld is, die elk even grote kans hebben wit of blauw te zijn. Doordat van een andere veronderstelling t.a.v. de wijze van vulling wordt uitgegaan, ontstaat de mogelijkheid twee verschillende antwoorden te vinden.

Ten slotte vergelijken we hier nog de boven gegeven oplossing mee. Hier is er van uitgegaan, dat de zak met vier knikkers gevuld is, die elk even grote kans hebben wit of blauw te zijn. Op de een of andere manier hebben we daarna gemerkt, dat er een witte knikker aanwezig was. Nu is de vooronderstelling dezelfde als die in geval 2e en vinden we dus ook dezelfde uitkomst.
Opmerking. Het is tegenwoordig geen gebruik meer kansen a priori op dergelijke vreemdsoortige manier te bepalen. Men stelt liever a priori de kansen op de verschillende mogelijke gevallen aan elkaar gelijk. Men doet dit, zoals Paratt dat in Probability and Experimental Error in Sciences (p. 15) noemt, 'in desperation'. Experimenten zijn dan aanleiding deze kansen a priori te corrigeren en zo kansen a posteriori te bepalen. Door het gelijkstellen van de kansen a priori vervalt het uitgangspunt van de redenering van L.C. en daarmee de mogelijkheid tot dergelijke merkwaardige conclusies te komen.

Nederlandse vereniging van wiskundeleraren

Contributie

De penningmeester verzoekt de leden hun contributie voor het verenigingsjaar 1972-1973 te voldoen.
Dit kan door storting of overschrijving van *f* 20,– op giro 143917 t.n.v. Ned. Ver. van Wiskundeleraren, te Amsterdam.
Zij die Euclides niet via de vereniging ontvangen betalen *f* 7,50.

Historia mathematica

The World Directory of Historians of Mathematics, containing about 700 names and addresses indexed by countries (40) and research specialties (about 300), is now available from Historia Mathematica, Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto 181, Canada. Price: $ 4.00 ($ 3.00 when payment accompanies order) in US or Canadian funds.

Genootschap voor geschiedenis der geneeskunde, wiskunde, natuurwetenschappen en techniek

De najaarsvergadering van het genootschap zal worden gehouden op zaterdag 4 en zondag 5 november 1972 te Zaandam. Belangstellenden kunnen zich voor nadere inlichtingen en voor toezending van het programma wenden tot de secretaris Dr. A.J.E.M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

INHOUD